**Prénom :** ……………… **Nom :**……………………………… **Note : …… /20**

**1ère S3**

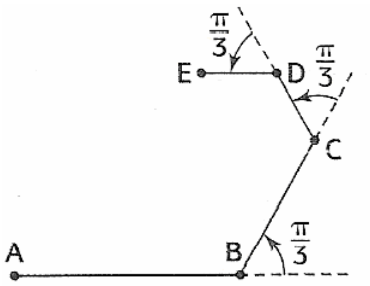
# Contrôle du mercredi 27 janvier 2010 (2 heures)

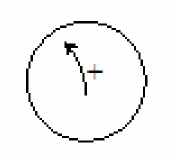
Présenter correctement la première copie avec le nom, le prénom, la classe, la date et l'intitulé exact sans abréviations.
Ecrire très lisiblement à l'encre et sans rature, sans utiliser d'abréviations.
On traitera les exercices dans l'ordre en prenant une page pour chaque exercice.
Traiter l'exercice I sur la première page ; pour les autres exercices, commencer chaque fois en haut d'une page.
Encadrer tous les résultats en rouge à la règle.

| I (2 points) | II (4 points) | III (3 points) | IV (2 points) | V (2 points) | VI (2 points) | VII (3 points) | VIII (2 points) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |

---

**I. (2 points)** Dans le plan orienté, on considère la ligne brisée ABCDE construite sur la figure ci-dessous.



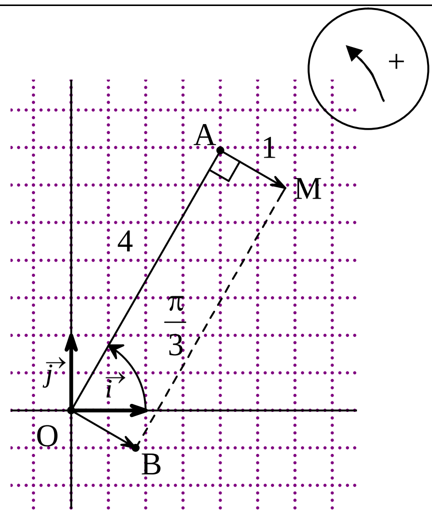

1°) Donner sans justifier une mesure en radians des angles orientés $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right)$, $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}\right)$, $\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}\right)$.

On se contentera d'écrire sur une même ligne : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = \ldots\ldots\ldots$, $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}\right) = \ldots\ldots\ldots$, $\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}\right) = \ldots\ldots\ldots$.

2°) Démontrer que les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

---

**II. (4 points)** On considère la figure ci-contre dans le plan orienté muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.




On donne : $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OA}\right) = \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$, $OA = 4$, $AM = 1$ et $\left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM}\right) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$.

1°) Donner un système de coordonnées polaires de A puis calculer les coordonnées cartésiennes $x_A$ et $y_A$ de A.

2°) Soit B le point tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OB}$.
Donner un système de coordonnées polaires $(\rho, \theta)$ de B en justifiant.

3°) Calculer les coordonnées cartésiennes $x_M$ et $y_M$ de M (on veillera à présenter convenablement les calculs).

4°) Soit C le point d'intersection de (BM) et de l'axe des abscisses. Calculer la longueur OC.

---

**Dans les exercices III à VI,** les traits de fractions, les tableaux de variations ainsi que les flèches de variations devront être faits à la règle.

Les valeurs des extremums locaux ou globaux éventuels (on fera les calculs au brouillon) doivent figurer dans les tableaux de variation. On pourra éventuellement mettre les limites sans explication.

---

**III. (3 points)** On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x-4}{x^2+1}$.

Donner sans justifier l'ensemble de définition de *f*.

Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de *f*.

---

**IV. (2 points)** On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{3}\left(x+\dfrac{9}{x}\right)$.

Donner sans justifier l'ensemble de définition de *f*.

Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de *f*.

---

**V. (2 points)** On considère la fonction $f : x \mapsto x^3-6x$.

Donner sans justifier l'ensemble de définition de *f*.

Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de *f*.

---

**VI. (2 points)** On considère la fonction $f : x \mapsto x-\dfrac{3}{2x}+1$.

Donner sans justifier l'ensemble de définition de *f*.

Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de *f*.

---

**VII. (3 points)** On considère la fonction $f : x \mapsto -\dfrac{2}{x}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer $f'(x)$ (donner l'expression sans explication).

2°) Soit A un point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $a$ où $a$ est un réel non nul fixé.

Déterminer une équation de la tangente $T$ à $\mathcal{C}$ au point A.

Entourer la réponse choisie parmi celles qui sont proposées ci-dessous.

☐ $y=\dfrac{2}{a^2}x$ ☐ $y=\dfrac{2}{a^2}(x-2a)$ ☐ $y=\dfrac{2}{a^2}(2a-x)$

3°) A l'aide du résultat du 2°), déterminer les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente passe par le point K(1 ; 6). On soignera particulièrement la rédaction.

---

**VIII. (2 points)** On considère la fonction $f : x \mapsto x^3+x^2-2x$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Recopier et compléter en rouge <u>sans justifier</u> les phrases suivantes :

1°) $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses ………………………………………...

2°) $\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale aux points d'abscisses ……………………………………..

3°) $\mathcal{C}$ admet une tangente parallèle à la droite Δ d'équation $y=1+3x$ aux points d'abscisses ………………….

4°) La tangente en O à $\mathcal{C}$ recoupe $\mathcal{C}$ au point de coordonnées (……. ; …….).

**$1^{\text{ère}}$ S3**

# Corrigé du contrôle du 27 janvier 2010

**Une remarque d'orthographe : le mot « rationnelle » s'écrit avec deux « *n* ».**

---

**I.**

1°) $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = \dfrac{\pi}{3}$, $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}\right) = \dfrac{\pi}{3}$, $\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.

2°) D'après la relation de Chasles pour les angles orientés, on a :

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE}\right) &= \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}\right) + \left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}\right)\\ &= \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\\ &= \pi\end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires (et de sens contraires, ce qui est bien cohérent avec la figure).

On en déduit que les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

---

**II.**

1°) Calculons les coordonnées cartésiennes de A

La figure nous permet de voir que le point A a pour coordonnées polaires $\left(4\,;\dfrac{\pi}{3}\right)$.

On a donc :

$$\begin{cases} x_A = 4 \times \cos\dfrac{\pi}{3} \\ y_A = 4 \times \sin\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_A = 4 \times \dfrac{1}{2} \\ y_A = 4 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_A = 2 \\ y_A = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Le point A a donc pour coordonnées cartésiennes $\left(2\,;2\sqrt{3}\right)$.

2°) Déterminons un système de coordonnées polaires de B.

D'après les hypothèses, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AM}$ et $AM = 1$ d'où $OB = 1$.

$$\begin{aligned}
\left(\vec{i}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) &= \left(\vec{i}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) + \left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) \quad (2\pi) \\
&= \left(\vec{i}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) + \left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{AM}}\right) \quad (2\pi) \\
&= \left(\vec{i}, \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right) + \left(\overrightarrow{\mathrm{AO}}, \overrightarrow{\mathrm{AM}}\right) + \pi \quad (2\pi) \\
&= \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \pi \quad (2\pi) \\
&= \frac{11\pi}{6} \quad (2\pi) \\
&= -\frac{\pi}{6} \quad (2\pi)
\end{aligned}$$

Le point B a pour coordonnées polaires $\left(1\,;-\frac{\pi}{6}\right)$.

3°) Calculons les coordonnées cartésiennes $x_{\mathrm{M}}$ et $y_{\mathrm{M}}$.

Calculons d'abord les coordonnées cartésiennes de B.

$$\begin{cases} x_{\mathrm{B}} = 1 \times \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ y_{\mathrm{B}} = 1 \times \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{\mathrm{B}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y_{\mathrm{B}} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

On a $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ donc

$$\begin{cases} x_{\mathrm{M}} - x_{\mathrm{A}} = x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{O}} \\ y_{\mathrm{M}} - y_{\mathrm{A}} = y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{O}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{\mathrm{M}} - 2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y_{\mathrm{M}} - 2\sqrt{3} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{\mathrm{M}} = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y_{\mathrm{M}} = 2\sqrt{3} - \frac{1}{2} \end{cases}$$

**III.** $f : x \mapsto \dfrac{3x-4}{x^2+1}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction rationnelle.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{3\left(x^2+1\right)-(3x-4)\times 2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$= \frac{3x^2+3-6x^2+8x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$= \frac{-3x^2+8x+3}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Considérons le polynôme $-3x^2+8x+3$.

**Recensement des coefficients :**
$a=-3$ ; $b=8$ ($b'=4$) ; $c=3$

Calcul du discriminant réduit

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &= 4^2-3\times(-3)\\ &= 25\end{aligned}$$

On a : $\Delta' > 0$ donc le polynôme admet 2 racines distinctes dans $\mathbb{R}$ :

$$x_1 = \frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a} \qquad x_2 = \frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$$

$$x_1 = \frac{-4-\sqrt{25}}{-3} \qquad x_2 = \frac{-4+\sqrt{25}}{-3}$$

$$x_1 = 3 \qquad x_2 = -\frac{1}{3}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{3}$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $-3x^2+8x+3$ | | $-$ | $0^{\text{num}}$ | $+$ | $0^{\text{num}}$ | $-$ | |
| Signe de $\left(x^2+1\right)^2$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| Signe de $f'(x)$ | | $-$ | $0^{\text{num}}$ | $+$ | $0^{\text{num}}$ | $-$ | |
| Variations de $f$ | | ↘ | $-\frac{9}{2}$ | ↗ | $\frac{1}{2}$ | ↘ | |

**IV.** $f : x \mapsto \dfrac{1}{3}\left(x+\dfrac{9}{x}\right)$

$\boldsymbol{D}_f = \mathbb{R}^*$

$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = \frac{1}{3}\left(1-\frac{9}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{x^2-9}{x^2}$$

$$= \frac{x^2-9}{3x^2}$$

(ou $f'(x) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{x^2-9}{x^2} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{(x-3)(x+3)}{x^2}$ dans ce cas, le $\dfrac{1}{3}$, on en fait quoi ? Il est juste figurant)

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $0$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $x^2-9$ | | + | $0^{\text{num}}$ | − | | − | $0^{\text{num}}$ | + | |
| Signe de $x^2$ | | + | | + | $0^{\text{déno}}$ | + | | + | |
| Signe de $f'(x)$ | | + | $0^{\text{num}}$ | − | ‖ | − | $0^{\text{num}}$ | + | |
| Variations de $f$ | | ↗ | $-2$ | ↘ | ‖ | ↘ | $2$ | ↗ | |

---

**V.** $f : x \mapsto x^3 - 6x$

$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3x^2 - 6$$

$3x^2-6$ est un polynôme du second degré (incomplet en $x$) dont les racines sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

**N.B. :** On peut éventuellement factoriser $f'(x) = 3(x^2-2)$ ou même aller plus loin $f'(x) = 3\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{2}$ | | $\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| Variations de $f$ | | ↗ | $4\sqrt{2}$ | ↘ | $-4\sqrt{2}$ | ↗ | |

$$f\left(-\sqrt{2}\right) = 4\sqrt{2}$$

$$f\left(\sqrt{2}\right) = -4\sqrt{2}$$

**VI.** $f : x \mapsto x - \dfrac{3}{2x} + 1$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$

$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = 1 + \dfrac{3}{2x^2}$

Inutile de mettre au même dénominateur ; on voit directement sur l'expression que la dérivée est strictement positive.

| $x$ | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | + | ‖ | + |
| Variations de $f$ | ↗ | ‖ | ↗ |

---

**VII.**

1°) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$

$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = -2 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{2}{x^2}$

2°) L'équation réduite de la tangente $T$ à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse $a$ $\left(a \in \mathbb{R}^*\right)$ s'écrit

$y = f'(a)(x-a) + f(a)$

soit $y = \dfrac{2}{a^2}(x-a) - \dfrac{2}{a}$

$y = \dfrac{2}{a^2}x - \dfrac{2}{a^2} \times a - \dfrac{2}{a}$ (on développe)

$y = \dfrac{2}{a^2}x - \dfrac{2}{a} - \dfrac{2}{a}$

$y = \dfrac{2}{a^2}x - \dfrac{4}{a}$

Finalement, on obtient $y = \dfrac{2}{a^2}(x - 2a)$

2°)

K $\in T$ si et seulement si $y_A = \dfrac{2}{a^2}(x_A - 2a)$

si et seulement si $6 = \dfrac{2}{a^2}(1-2a)$

si et seulement si $6a^2 = 2-4a$

si et seulement si $6a^2 + 4a - 2 = 0$

si et seulement si $3a^2 + 2a - 1 = 0$

si et seulement si $a = -1$ (racine évidente) ou $a = \dfrac{1}{3}$ (obtenue par produit)

Donc les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente passe par le point K sont – 1 et $\dfrac{1}{3}$.

---

**VIII.**

1°) $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses – 2, 0, 1.

**Méthode :** on résout l'équation $f(x) = 0$.

$x(x^2 + x - 2) = 0$

Les racines du polynôme $x^2 + x - 2$ sont 1 (racine évidente) et – 2 (obtenue par produit).

2°) $\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale aux points d'abscisses $\dfrac{-1-\sqrt{7}}{3}$ et $\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}$.

Méthode : on résout l'équation $f'(x) = 0$.

3°) $\mathcal{C}$ admet une tangente parallèle à la droite $\Delta$ d'équation $y = 1 + 3x$ aux points d'abscisses 1 et $-\dfrac{5}{3}$.

4°) La tangente en O à $\mathcal{C}$ recoupe $\mathcal{C}$ au point de coordonnées (– 1 ; 2).