$1^{\text{ère}}$ S3	**Interrogation écrite du vendredi 16 octobre 2009**	**Note : ……/ 20**

Prénom et nom : ……………………………….

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé. Brouillon autorisé. Prêt de matériel interdit.
Compléter cette feuille très lisiblement <u>sans rature</u> !

I. (2 points) Question de cours

Cette question de cours porte sur des éléments de la démonstration lors de la mise sous forme canonique d'un trinôme du second degré. Soit *a, b, c* trois réels tels que $a \neq 0$.

Compléter les cases de droite sans détailler les calculs.

1°) Développer $\left(-\frac{b}{2a}\right)^2$.	

2°) Mettre au même dénominateur l'expression $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}$.	

II. (5 points) On considère le polynôme $f(x)=2x^2+6x-8$.

1°) Compléter la phrase : « Les racines de $f(x)$ sont : ……………………………….. ».

2°) Donner une factorisation de $f(x)$ en facteurs du premier degré : $f(x)=$ ....

3°) Donner une factorisation du polynôme $P(x)=9\left(x^2+x-2\right)^2-\left(x^2-3x+2\right)^2$ en facteurs du premier degré.

$P(x)=$ ....

III. (3 points) Soit *a* un réel non nul. On considère le polynôme $P(x)=ax^2-2ax+a+1$.

1°) Calculer le discriminant réduit Δ' de $P(x)$ en fonction de *a* (calculs au brouillon). Δ' = ……………

2°) On suppose que *a* est strictement positif. Quel est le signe de $P(x)$? Justifier brièvement.

……………………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………………….

3°) Déterminer *a* tel que – 1 soit racine de $P(x)$. ……………………………………

Dans ce cas, donner l'autre racine de $P(x)$. ……………………………………

IV. (4 points) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\frac{3x}{x+2}\leq 2-x$.

V. (6 points) Soit A et B deux points du plan. On note I le milieu de [AB], J le symétrique de I par rapport à A, K le symétrique de A par rapport à B et L le barycentre des points pondérés (A, 4) et (B, – 3).

1°) Compléter sans justifier l'égalité : $\overrightarrow{AL} = ... \ \overrightarrow{AB}$.

2°) Compléter directement les phrases :

I est le barycentre des points pondérés (A, ….) et (B, ….).

J est le barycentre des points pondérés (A, ….) et (B, ….).

K est le barycentre des points pondérés (A, ….) et (B, ….).

3°) Soit M un point quelconque du plan.
Compléter sans justifier les égalités : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = ...$; $4\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = ...$

4°) **Question bonus** (à traiter sur une feuille à part) : démontrer que J est le milieu du segment [KL].

$1^{\text{ère}}$ S3

Correction de l'interrogation écrite du 16 octobre 2009

I. 1 point par réponse

$$\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$$

$\dfrac{c}{a} - \dfrac{b^2}{4a^2} = \dfrac{4ac - b^2}{4a^2}$ (mettre au même dénominateur signifie aussi mettre sur une même fraction)

II. $f(x) = 2x^2 + 6x - 8$

1°) sur 2 ; 2°) sur 1 ; 3°) sur 2 points

1°) Les racines de $f(x)$ sont : 1 et – 4.

2°) $f(x) = 2(x-1)(x+4)$ (règle de factorisation d'un trinôme).

Réponses fausses trouvées dans des copies :

$f(x) = 2\left[\left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{25}{4}\right]$ (confusion forme canonique – forme factorisée)

$f(x) = 2(x^2 + 3x - 4)$ (erreur le polynôme dans la parenthèse est du second degré ; or on voulait une factorisation en facteurs du premier degré)

3°) Donnons une factorisation du polynôme $P(x) = 9(x^2 + x - 2)^2 - (x^2 - 3x + 2)^2$ en facteurs du premier degré.

$$P(x) = \left[3(x^2 + x - 2)\right]^2 - (x^2 - 3x + 2)^2$$

On utilise l'identité remarquable $a^2 - b^2$.

$$P(x) = \left[3(x^2 + x - 2) + (x^2 - 3x + 2)\right]\left[3(x^2 + x - 2) - (x^2 - 3x + 2)\right]$$
$$P(x) = (4x^2 - 4)(2x^2 + 6x - 8)$$
$$P(x) = 4(x^2 - 1) \times 2(x-1)(x+4)$$
$$P(x) = 8(x-1)(x+1)(x-1)(x+4)$$
$$P(x) = 8(x-1)^2(x+1)(x+4)$$

Trouvé dans des copies

$P(x) = 8(x^2 - 1)(x^2 + 3x - 4)$ (erreur : les facteurs ne sont pas du premier degré)

$P(x) = (4x^2 - 4)(2x^2 + 6x - 8)$

III. $a \neq 0$. $P(x) = ax^2 - 2ax + a + 1$

1°) Δ' = $a^2 - a(a+1) = -a$

2°) Pour déterminer le signe du polynôme $P(x)$, on utilise la **<u>règle du signe d'un polynôme du second degré</u>**.

Si $a > 0$, alors Δ' < 0.
Le polynôme $P(x)$ est toujours du signe de *a*.
Comme $a > 0$, on en déduit que, pour tout réel *x*, on a : $P(x) > 0$.

3°) Déterminons *a* tel que – 1 soit racine de $P(x)$.

– 1 est racine de $P(x)$ si et seulement si $P(-1) = 0$
si et seulement si $a \times (-1)^2 - 2a \times (-1) + a + 1 = 0$
si et seulement si $3a + 1 = 0$
si et seulement si $a = -\dfrac{1}{3}$

IV. (4 points = 1 point pour la mise sous la forme $\dfrac{x^2+3x-4}{x+1} \leq 0$; 1 point pour le polynôme $x^2 + 3x - 4$; 1 point pour le tableau de signes ; 1 point pour la réponse)

L'inéquation est successivement équivalente aux inéquations suivantes :

$$\frac{3x}{x+1} - \frac{4-x^2}{x+1} \leq 0$$

$$\frac{3x-4+x^2}{x+1} \leq 0$$

$$\frac{x^2+3x-4}{x+1} \leq 0$$

Considérons le polynôme $x^2 + 3x - 4$.

$x_1 = -4$; $x_2 = 1$

On dresse un tableau de signes.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S = \left]-\infty\,;-4\right] \cup \left]-2\,;1\right]$.

V. (1 point chaque réponse)

I : milieu de [AB]
J : symétrique de I par rapport à A
K : symétrique de A par rapport à B
L : barycentre des points pondérés (A, 4) et (B, – 3).

1°) D'après l'égalité de position :
$\overrightarrow{AL} = -3\,\overrightarrow{AB}$.

2°)

● **Point I**

I est le barycentre des points pondérés (A, 1) et (B, 1).

● **Point J**

1ère méthode :
$\overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{AI}$ donc $\overrightarrow{AJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Or I est le milieu de [AB] donc $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Par suite, on peut $\overrightarrow{AJ} = \frac{-1}{3-1}\overrightarrow{AB}$.

D'après cette égalité, on peut dire que J est le barycentre des points pondérés (A, 3) et (B, –1).

2e méthode :
$\overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{AI}$ donc $\overrightarrow{AJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

On peut écrire $2\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.
En utilisant la relation de Chasles, on a : $2\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{JB} = \vec{0}$.
D'où $3\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{JB} = \vec{0}$.
Soit $-3\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} = \vec{0}$.
On en déduit $3\overrightarrow{JA} - \overrightarrow{JB} = \vec{0}$
Comme $3-1 \neq 0$, on peut dire que J est le barycentre des points pondérés (A, 3) et (B, –1).

● **Point K**

$\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AB}$

K est le barycentre des points pondérés (A, –1) et (B, 2).

3°) On utilise la relation fondamentale en utilisant les bons barycentres.

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\,\overrightarrow{MI}$; $4\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{ML}$

4°) **Bonus :**

$$\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AB} - \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{JL} = \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AJ} = -3\overrightarrow{AB} - \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) = -\frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$$

Donc $\overrightarrow{JK} = -\overrightarrow{JL}$
On en déduit que J est le milieu du segment [KL].

Exercice initial que j'ai laissé tomber

Soit A et B deux points du plan. On note I le milieu de [AB] , J le symétrique de I par rapport à A, K le symétrique de A par rapport à B et L le barycentre des points pondérés (A, 1) et (B, 3).

1°) Compléter sans justifier l'égalité : $\overrightarrow{AL} = \ldots\ \overrightarrow{AB}$.

2°) Compléter directement les phrases :

I est le barycentre des points pondérés (A, ….) et (B, …).

J est le barycentre des points pondérés (A, ….) et (B, …).

K est le barycentre des points pondérés (A, ….) et (B, …).

3°) Soit M un point quelconque du plan.

Compléter sans justifier les égalités : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$; $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

4°) **Question bonus** (à traiter sur une feuille à part) : démontrer que L est le milieu du segment [JK].