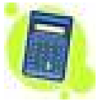
1$^{\text{ère}}$ S1

Contrôle du mercredi 1$^{\text{er}}$ décembre 2010 (1 h 30)



Répondre très lisiblement et sans rature, en écrivant au stylo à plume et sans utiliser d'abréviation.
On rappelle que toute lettre utilisée dans la rédaction et non définie dans l'énoncé doit être clairement précisée.
Tous les traits de fractions doivent être tirés à la règle.

Prénom et nom : ……………………………………………….

Note :

…… /40 = **…… /20**

---

1 **(5 points) Questions de cours**

1°) La fonction carrée est : ☐ paire ☐ impaire

Traduire cette propriété algébriquement sous la forme d'une phrase mathématique quantifiée.

……………………………………………………………………………………..……..…..

2°) Quel est l'ensemble de définition de la fonction racine carrée ? Compléter la phrase :

L'ensemble de définition de la fonction racine carrée est …………….

3°) On considère le polynôme $P(x)=ax^2+bx+c$ où a, b, c sont trois réels tels que a soit non nul.
On suppose que le discriminant de $P(x)$ est strictement positif.
Compléter les phrases :

- La somme des racines de $P(x)$ est égale à ………
- Le produit des racines de $P(x)$ est égal à ……….

---

2 **(5 points)** On pose $\mathrm{I}=[-1\,;2]$.

1°) Compléter les phrases suivantes sans justifier en donnant la valeur :

- Le maximum de la fonction carrée sur I est ………………... .
- Le minimum de la fonction carrée sur I est ………………… .
- Le maximum de la fonction cube sur I est ……………….. .
- Le minimum de la fonction cube sur I est ………………… .

2°) Déduire de la question précédente un encadrement de x^2+x^3 pour $x\in\mathrm{I}$.

……………………………………………………………………………………………………..……..….

……………………………………………………………………………………………………..……..….

……………………………………………………………………………………………………..……..….

……………………………………………………………………………………………………..……..….

---

3 **(4 points)** On pose $P(x)=3+2x-x^2$.

1°) Compléter la phrase :

« Les racines de $P(x)$ sont …… et …… ».

2°) Compléter le tableau ci-dessous donnant le tableau de signe de $P(x)$.

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $P(x)$		

3°) Exprimer $|P(x)|$ sans barres de valeur absolue suivant les valeurs de x.

……………………………………………………………………………………………………..……..….

……………………………………………………………………………………………………..……..….

……………………………………………………………………………………………………..……..….

……………………………………………………………………………………………………..……..….

Dans la suite du contrôle, on veillera à soigner la rédaction et la présentation.

En particulier, les tableaux de signes doivent être effectués à la règle et ne doivent comporter aucune rature.

On veillera à ne pas utiliser de lettres sans les avoir préalablement clairement introduites au préalable.
Pour l'exercice **7** en particulier, un point qui n'a pas été défini dans l'énoncée doit être placé sur la figure.

$\boxed{4}$ **(2 points)** On pose $Q(x) = 3x^2 - x - 2$.

Compléter sans expliquer la phrase :

« Les racines de $Q(x)$ sont ………… et …………... ».

En déduire une factorisation de $Q(x)$.

………

………

………

$\boxed{5}$ **(4 points)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x - \dfrac{2}{x} \geqslant 1 \quad (1)$. Tous les traits de fraction doivent être tracés à la règle.

Voir rappels de rédaction à la fin de l'énoncé (à respecter impérativement).

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

$\boxed{6}$ **(2 points)** On considère le polynôme $P(x)=(m-1)x^2-4mx+4m-1$ où m est un réel distinct de 1 (m est un paramètre).
Calculer le discriminant Δ de $P(x)$ sans détailler les calculs. Donner uniquement le résultat.

Δ = ……………………………………

$\boxed{7}$ **(10 points)** Soit ABC un triangle quelconque. On note G le barycentre des points pondérés (A ; 3), (B ; 1), (C ; 1) et I le point tel que $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

1°) Faire une figure. Expliquer la construction du point G.
Pour la figure, prendre un triangle ABC n'ayant que des angles aigus, tel que le côté [AB] soit « horizontal » et C « au-dessus » de la droite (AB).
2°) Recopier et compléter sans expliquer la phrase :
« I est le barycentre des points pondérés (A ; …) et (B ; …). »
3°) Démontrer que les points C, I, G sont alignés sans utiliser les vecteurs.
4°) Démontrer que G appartient à une médiane du triangle ABC.
5°) Bonus à rédiger sur une feuille à part :
On note K le milieu de [AC] et L le point tel que $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
A l'aide du repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$, démontrer que les points G, K, L sont alignés en utilisant les coordonnées.

8 **(4 points) Algorithmique**

On considère l'algorithme ci-dessous rédigé en langage naturel qui comporte une boucle « Pour ».

> **Entrée :**
> Saisir A, *n*
>
> **Traitement :**
> **Pour** *i* variant de 1 jusqu'à *n* **Faire**
> | A prend la valeur $\frac{1}{2}\text{A}+2$
> **FinPour**
>
> **Sortie :**
> Afficher A

On notera bien que A est un réel, *n* est un entier naturel supérieur ou égal à 2, *i* est un entier naturel défini avec un pas de 1.

1°) Comment s'appelle la variable *i* ? ………….……………………………………………………..…

2°) Dans toute cette question, on suppose que $\text{A}=36$ et $n=4$.

a) Quelle est la valeur de *i* et celle de A au début du premier passage dans la boucle (c'est-à-dire avant de passer dans la boucle) ?

● La valeur de *i* au début du premier passage dans la boucle est égale à ………

● La valeur de A au début du premier passage dans la boucle est égale à ………

b) Quelle est la valeur de *i* et celle de A au début du deuxième passage dans la boucle (c'est-à-dire après le premier passage dans la boucle) ?

● La valeur de *i* au début du deuxième passage dans la boucle est égale à ………

● La valeur de A au début du deuxième passage dans la boucle est égale à ………

c) Quel est le nombre de sortie ?

Le nombre de sortie est égal à ………

3°) Dans cette question, on suppose que $\text{A}=4$ (à l'entrée) et que *n* est un entier naturel quelconque.
Quel est le nombre de sortie ? Ce résultat dépend-il de *n* ? (on ne demande pas de justifier).

………..……..…..

………..……..…..

Question bonus :

Programmer cet algorithme sur calculatrice.
Faire fonctionner cet algorithme pour donner une valeur approchée du nombre de sortie lorsque $\text{A}=10$ et $n=25$.

9 **(4 points) Logique**

Soit *x* et *y* deux réels quelconques.
On considère les implications ci-dessous :

(1) « Si $xy<0$, alors $x<0$ **ou** $y<0$. »

(2) « Si $x>1$ **et** $y>1$, alors $xy>1$. »

Ces implications sont-elles vraies ou fausses ? Répondre sans justifier.

………..……..…..

………..……..…..

Enoncer les contraposées de ces deux implications.

………………………………………………………………..………………..

………………………………………………………………..………………..

Rappels de rédactions pour la résolution des équations et inéquations

① L'équation / inéquation (1) est successivement équivalente à :

….

….

….

② Soit *S* l'ensemble des solutions de l'équation / inéquation (1).

$S=$…………..

Corrigé du contrôle du 1er décembre 2010

Programme du contrôle :
- les valeurs absolues (1) et (2)
- les coordonnées dans le plan
- les barycentres
- les fonctions de référence et l'utilisation des fonctions de référence
- les algorithmes (instructions conditionnelles, boucles Pour)
- la logique (implication, implication réciproque, implication contraposée, les connecteurs « ou » et « et » en mathématiques, négation d'une proposition).
- le barycentre de plusieurs points
- le second degré (uniquement la 1ère partie)

1 **Questions de cours**

1°) La fonction carrée est : ☒ paire ☐ impaire

Traduction algébrique sous la forme d'une phrase mathématique quantifiée : $\forall x \in \mathbb{R} \quad (-x)^2 = x^2$.

On peut aussi écrire $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = f(x)$ mais <u>il faut avoir précisé auparavant que l'on note *f* la fonction « carré »</u>.

Deux remarques :

Une phrase quantifiée est une phrase commençant par « Pour tout … » ou « Il existe ».

Dire que la courbe de la fonction carré dans un repère orthogonal n'est pas une traduction algébrique de la parité de la fonction carré. C'est au contraire une conséquence de la parité.

2°) L'ensemble de définition de la fonction racine carrée est $\mathbb{R}_+$.

3°)

- La somme des racines de $P(x)$ est égale à $-\frac{b}{a}$.
- Le produit des racines de $P(x)$ est égal à $\frac{c}{a}$.

---

2 $\mathrm{I} = [-1\,;\,2]$

1°)

- Le maximum de la fonction carrée sur I est 4.
- Le minimum de la fonction carrée sur I est 0.
- Le maximum de la fonction cube sur I est 8.
- Le minimum de la fonction cube sur I est – 1.

2°) Encadrement de $x^2 + x^3$ pour $x \in \mathrm{I}$.

On a : $0 \leqslant x^2 \leqslant 4$
et : $-1 \leqslant x^3 \leqslant 12$.

On peut ajouter membre à membre deux inégalités de même sens.

On obtient l'encadrement : $-1 \leqslant x^2 + x^3 \leqslant 12$.

---

3 $P(x) = 3 + 2x - x^2$

1°) « Les racines de $P(x)$ sont – 1 et 3. »

2°) Tableau de signes de $P(x)$:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
Signe de $P(x)$		–	0	+	0	–	

3°) Expression de $|P(x)|$ sans barres de valeur absolue suivant les valeurs de *x*.

- Si $x \in [-1\,;\,3]$, alors $P(x) \geqslant 0$ donc $|P(x)| = P(x) = 3 + 2x - x^2$.
- Si $x \in \,]-\infty\,;\,-1] \cup [3\,;\,+\infty[$, alors $P(x) \leqslant 0$ donc $|P(x)| = -P(x) = -3 - 2x + x^2$.

---

4 $Q(x) = 3x^2 - x - 2$

« Les racines de $Q(x)$ sont 1 et $-\frac{2}{3}$. »

Factorisation de $Q(x)$:

$$Q(x) = 3(x-1)\left(x - \left(-\frac{2}{3}\right)\right)$$

$$Q(x) = 3(x-1)\left(x + \frac{2}{3}\right)$$

$$Q(x) = (x-1)(3x+2)$$

5 Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x-\frac{2}{x}\geqslant 1 \quad (1)$.

L'inéquation (1) est successivement équivalente à :

$x-\frac{2}{x}-1\geqslant 0$

$\frac{x^2-x-2}{x}\geqslant 0$

On considère le polynôme : x^2-x-2.

Le racines de ce polynôme sont – 1 (racine évidente) et 2 (obtenue par produit).

On dresse un tableau de signes.

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
SGN de x^2-x-2		$+$	0^{num}	$-$		$-$	0^{num}	$+$	
SGN de x		$-$		$-$	$0^{\text{déno}}$	$+$		$+$	
SGN de $\frac{x^2-x-2}{x}$		$-$	0^{num}	$+$	$\Vert$	$-$	0^{num}	$+$	

Soit S l'ensemble des solutions de l'inéquation (1).

L'ensemble des solutions de (1) est $S=\left]-1\,;0\right[\cup\left[2\,;+\infty\right[$.

---

6 $P(x)=(m-1)x^2-4mx+4m-1$ (m : paramètre réel distinct de 1)

Calcul du discriminant Δ de $P(x)$:

$$\boxed{\Delta=(4m)^2-4(m-1)(4m-1)=16m^2-4\left(4m^2-5m+1\right)=20m-4}$$

---

7 G : barycentre des points pondérés (A ; 3), (B ; 1) et (C ; 1)

$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

1°) $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$

2°) « I est le barycentre des points pondérés (A ; 3) et (B ; 3). »

3°) Démontrons que les points C, I, G sont alignés.

Par hypothèse, G est le barycentre des points pondérés (A ; 3), (B ; 1) et (C ; 1).
De plus, I est le barycentre des points pondérés (A ; 3) et (B ; 1).

Donc d'après le théorème du barycentre partiel, on peut dire que G est (I ; 4) et (C ; 1).

On en déduit que $G\in(CI)$.
Par suite, les points C, I, G sont alignés.

4°) Démontrons que G appartient à une médiane du triangle ABC.

Soit J le milieu du segment [BC].
Le point J est l'isobarycentre des points B et C ; on peut dire que J est le barycentre des points pondérés (B ; 1) et (C ; 1).
Or G est le barycentre des points pondérés (A ; 3), (B ; 1) et (C ; 1).
Donc d'après la règle du barycentre partiel, G est aussi le barycentre des points pondérés (A ; 3) et (J ; 2).

Donc G $\in$ (AJ).

Or (AJ) est la médiane issue de A.

5°) Bonus :

On se place dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.

K est le milieu de [AC] donc $K\left(0\,;\frac{1}{2}\right)$).

L le point tel que $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $L\left(\frac{1}{3}\,;0\right)$.

$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$ donc $G\left(\frac{1}{5}\,;\frac{1}{5}\right)$.

$\overrightarrow{GK}\left(-\frac{1}{5}\,;\frac{3}{10}\right)$

$\overrightarrow{GL}\left(\frac{2}{15}\,;-\frac{1}{5}\right)$

$$\begin{vmatrix}-\frac{1}{5} & \frac{2}{15}\\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5}\end{vmatrix}=\left(-\frac{1}{5}\right)\times\left(-\frac{1}{5}\right)-\frac{3}{10}\times\frac{2}{15}=\frac{1}{25}-\frac{1}{25}=0$$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{GK}$ et $\overrightarrow{GL}$ sont colinéaires.
Comme ils ont un point commun, on peut dire que les points G, K, L sont alignés.

8 **Algorithmique**

Dans un algorithme, une boucle permet de répéter un même travail un certain nombre de fois.

1°)

i s'appelle **un compteur**.

On dit que i est la **variable de boucle**.
La variable i compte le **nombre d'itérations**.
Cette variable n'intervient pas dans les calculs (**variable interne**).

Attention : i n'est pas un paramètre comme certains élèves ont pu l'écrire.

Quel est le rôle de la variable *n* dans l'algorithme ?

La variable n donne le **nombre d'itérations**.

2°)

a)

- La valeur de i au début du premier passage dans la boucle est égale à **1**.

- La valeur de A au début du premier passage dans la boucle est égale à **36**.

(On peut être déstabilisé par cette première question très simple).

b)

- La valeur de i au début du deuxième passage dans la boucle est égale à **2**.

- La valeur de A au début du deuxième passage dans la boucle est égale à **20**.

Explication :

On calcule $\frac{1}{2}\times 36+2=18+2=20$.

c) Le nombre de sortie (c'est-à-dire le résultat final) est égal à **6**.

Explication :

Après le passage dans la 1$^{\text{ère}}$ boucle, la valeur de A est égale à 20.
Après le passage dans la 2$^{\text{e}}$ boucle, la valeur de A est égale à $\frac{1}{2}\times 20+2=12$.

Après le passage dans la 3$^{\text{e}}$ boucle, la valeur de A est égale à $\frac{1}{2}\times 12+2=8$.

Après le passage dans la 4$^{\text{e}}$ boucle, la valeur de A est égale à $\frac{1}{2}\times 8+2=6$. C'est le résultat final, autrement dit le nombre de sortie.

3°)

Le nombre de sortie est 4 (on le voit en faisant des calculs).

Ce résultat ne dépend pas de *n*.

Question bonus :

Lorsque $\text{A}=10$ et $n=25$, le nombre de sortie est environ égal à 4.

---

9 **Logique**

« Si $xy<0$, alors $x<0$ **ou** $y<0$. »

« Si $x>1$ **et** $y>1$, alors $xy>1$. »

Ces deux implications sont **vraies**.

(L'implication (1) est vraie, car si le produit de deux nombres est négatif alors les deux nombres sont de signes contraires (donc x est positif ou x est négatif, le « ou » ayant ici un sens exclusif).

Contraposées de ces deux implications :

Si $x\geqslant 0$ **et** $y\geqslant 0$, alors $xy\geqslant 0$.

Si $xy\leqslant 1$, alors $x\leqslant 1$ **ou** $y\leqslant 1$.

Attention :

Le contraire du symbole $<$ est le symbole $\geqslant$.

Le contraire du symbole $>$ est le symbole $\leqslant$.