1ère S1

Contrôle du jeudi 21 octobre 2010 (2 h)

Répondre très lisiblement et sans rature, en écrivant au stylo à plume et sans utiliser d'abréviation.
On rappelle que toute lettre utilisée dans la rédaction et non définie dans l'énoncé doit être clairement définie.

Prénom et nom : ………………………………………………….

Note :

…… /40 = **…… /20**

---

1 (6 points) Questions de cours

1°) Soit x et y deux réels quelconques. Compléter :

$|x| = |y|$ équivaut à ………………………………………………………..

2°) Soit ABC un triangle quelconque. Ecrire l'égalité vectorielle traduisant qu'un point M du plan a pour coordonnées cartésiennes (x, y) dans le repère $\left(\text{A}, \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right)$.

………………………….……………...

3°) Soit x un réel quelconque. Compléter l'égalité :

$|-x| =$ ……..

4°) Soit A et B deux points quelconques du plan et a et b deux réels quelconques tels que $a + b \neq 0$.
On note G le barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b).
Compléter l'égalité ci-dessous sans justifier :

Pour tout point M du plan, $a\overrightarrow{\text{MA}} + b\overrightarrow{\text{MB}} =$ ………………………………….

5°) Soit a un réel positif ou nul. Compléter la définition de la racine carrée de a.

La racine carrée de a est ………………………………………………………………………………… .

6°) Soit a et b deux réels quelconques. Ecrire l'expression développée réduite et ordonnée.

$(a-b)^3 =$ ………………………………………………………..

2 (3 points) Soit x et y deux réels tels que $|x+2| < 4$ et $|y-1| < 5$.
Donner le meilleur encadrement de x et de y. En déduire le meilleur encadrement de $x + y$.

………… < x < …………	………… < y < …………	………… < $x + y$ < …………

---

3 (1 point) Soit D un axe de repère $\left(\text{O}, \vec{i}\right)$ tel que $\left\|\vec{i}\right\| = 1$. Soit A le point de D d'abscisse 3 et M un point quelconque de D d'abscisse x. On pose $f(x) = 2\ \text{OM} - \text{AM}$.
Exprimer $f(x)$ en fonction de x. Donner le résultat sans justifier.

$f(x) =$ ………………….………

---

4 (2 points) Soit x un réel tel que $|x| < \frac{1}{2}$ (1). On pose $y = x + \frac{1}{2}$.
1°) Déterminer un encadrement de y.

……..

……..

……..

……..

……..

……..

2°) (Question en lien avec la précédente) Comparer sans calcul y, y^2 et y^3. On ne demande pas d'expliquer.

……..

---

5 (1 point) Soit x un réel quelconque. Compléter à l'aide d'inégalités portant sur x :

$x^2 \geq 9$ équivaut à ………………………………….

$\boxed{6}$ **(2 points)** On considère la polynôme $P(x) = x^2 - 2x - 3$. Les deux questions sont indépendantes.

1°) Donner sans détailler les calculs la forme canonique de $P(x)$.

$P(x) =$ …………………………………

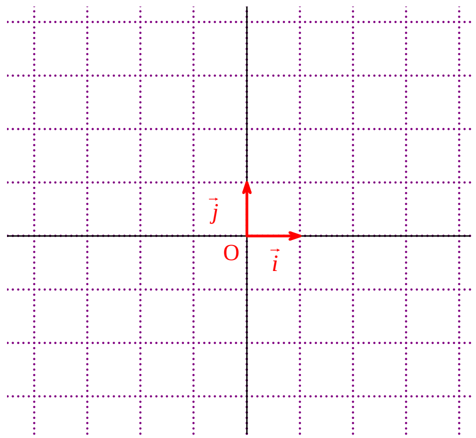
2°) Calculer le discriminant Δ de $P(x)$ en détaillant les calculs.

$\Delta =$ ……..……….……………………………………………………………………………

$\boxed{7}$ **(1 point)** Le plan est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Hachurer sur le graphique ci-dessous l'ensemble *E* des points M(*x*, *y*) du plan tels que $x \geqslant 0$ **ou** $y \geqslant 0$.

Comment qualifie-t-on le « ou » en mathématiques ? ……………………..



$\boxed{8}$ **(2 points)** Compléter les phrases suivantes sans justifier :

- Le maximum de la fonction carrée sur l'intervalle [– 3 ; 2] est ……………….. .
- Le minimum de la fonction carrée sur l'intervalle [– 3 ; 2] est ………………… .

$\boxed{9}$ **(4 points)** On considère les fonctions $f : x \mapsto \sqrt{5-x}$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{4-x^2}$.

Donner leurs ensembles de définition respectifs ***D*** et ***D*** '.

D =…………………..	***D*** '=…………………..

$\boxed{10}$ **(11 points)** Dans le plan muni d'un repère quelconque $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on donne les points A(– 3, 0), B(0, – 2), C(6, 1) et D(3, 3).

Placer les points sur la figure ci-dessous que l'on complètera au fur et à mesure. Marquer les valeurs de leurs coordonnées sur les axes.

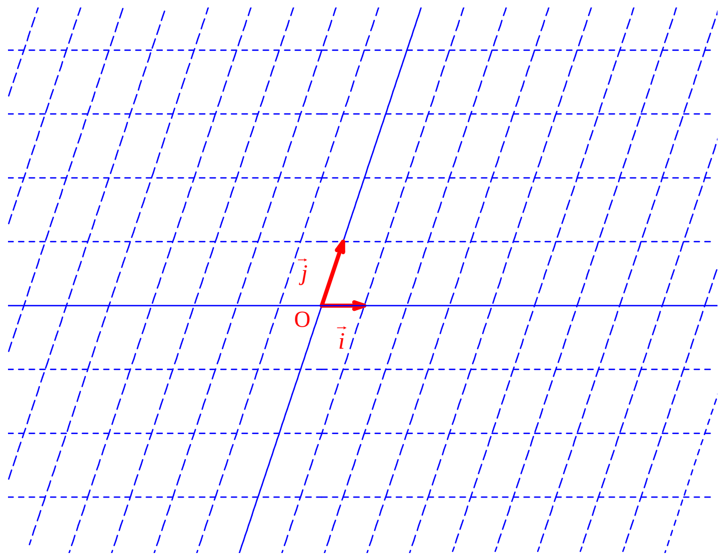
On soignera particulièrement la présentation des calculs et la rédaction dans cet exercice. Encadrer tous les résultats en rouge à la règle.

1°) Démontrer que ABCD est un parallélogramme.

2°) Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ parallèle à (AC) passant par B.
Rédiger très soigneusement en utilisant la colinéarité.

3°) La droite Δ coupe l'axe des abscisses en un point E. Calculer x_{E}.

4°) Soit G le barycentre des points pondérés (A, 2) et (B, 3).
Calculer les coordonnées de G. Démontrer G $\in$ (OD).



…….……..…..

…….……..…..

…….……..…..

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……..……..…..

……..……..…..

……..……..…..

……..……..…..

……..……..…..

……..……..…..

……..……..…..

---

11 **(2 points) Algorithmique**

On considère l'algorithme ci-dessous rédigé en langage naturel.

> **<u>Entrée</u>**
> Saisir n
> **<u>Traitement</u>**
> a prend la valeur $n + 4$
> b prend la valeur $a \times n$
> c prend la valeur $b + 4$
> **<u>Sortie</u>**
> Afficher c

Quelles sont les variables informatiques utilisées dans cet algorithme ?

……………………………………………

Quel est le nombre de sortie lorsque le nombre d'entrée est 2 ? (On pourra faire « tourner » l'algorithme « à la main » en indiquant le contenu de chaque variable informatique).

……………

12 **(5 points) Logique**

1°) Soit x et y deux réels quelconques.
On considère l'implication ci-dessous (I) :

« Si $x > 1$ **et** $y > 1$, alors $xy > 1$. »

Cette implication est-elle vraie ?

☐ Oui ☐ Non.

Enoncer l'implication réciproque de (I).

« Si ……………, alors ………………………………. . »

L'implication réciproque est-elle vraie ?

☐ Oui ☐ Non.

Enoncer la contraposée de l'implication (I).

« Si …………….., alors ………………………….……. . »

2°) Soit x et y deux réels quelconques.
On considère l'implication ci-dessous (I) :

« Si $xy = 0$, alors $x = 0$ **ou** $y = 0$. »

Enoncer la contraposée de l'implication (I).

« Si ………………………, alors ………………………………. . »

$1^{\text{ère}}$ S1

Corrigé du contrôle du 21 octobre 2010

Programme du contrôle :
- les valeurs absolues (1) et (2)
- les coordonnées dans le plan
- les équations de droites
- les fonctions de référence
- les algorithmes (instructions conditionnelles)
- la logique (implication, implication réciproque, implication contraposée, les connecteurs « ou » et « et » en mathématiques, négation d'une proposition).
- le barycentre de deux points
- le second degré (début : forme canonique et discriminant)

1 Questions de cours

1°)

$|x| = |y|$ équivaut à $x = y$ ou $x = -y$.

2°)

$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$

Explication :

Rappel : Considérons un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Attention à l'ordre, le repère est noté $(O, \vec{i}, \vec{j})$: il y a un ordre.

$\vec{i}$ est le premier vecteur de base ; $\vec{j}$ est le deuxième vecteur de base.

Soit M un point de coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
x et la $1^{\text{ère}}$ coordonnée de M, y est la seconde coordonnée de M.
M a pour coordonnées (x, y) dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ signifie que $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$.

On adapte ici la définition en remplaçant O par A, $\vec{i}$ par $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{j}$ par $\overrightarrow{AC}$

3°)

$|-x| = |x|$ (la valeur absolue est indispensable)

4°) Relation fondamentale

Pour tout point M du plan, $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a+b)\overrightarrow{MG}$.

5°)

La racine carrée de a est l'unique réel x positif ou nul* tel que $x^2 = a$.

Il est indispensable de préciser que ce réel x est positif ou nul.

6°)

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

2 $|x+2| < 4$ et $|y-1| < 5$.

$-6 < x < 2$	$-4 < y < 6$	$-10 < x + y < 8$ *

* Explication : on peut ajouter membre à membre deux inégalités de même sens sans changer le sens de l'inégalité.

---

3 OM = $|x|$ et AM = $|x-3|$

$f(x) = 2|x| - |x-3|$

---

4 $|x| < \frac{1}{2}$ (1)

1°) Déterminons un encadrement de y.

D'après (1), on a : $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

On ajoute $\frac{1}{2}$ à chaque membre de l'inégalité.

On obtient alors : $0 < x + \frac{1}{2} < 1$ soit $0 < y < 1$ (2).

2°) Comparons sans calcul y, y^2 et y^3.

D'après (2) et la règle du cours correspondante, on a : $y^3 < y^2 < y$.

5 Complétons à l'aide d'inégalités portant sur x :

$$\boxed{x^2 \geq 9 \text{ équivaut à } x \leq -3 \text{ ou } x \geq 3}$$

On peut aussi traduire à l'aide d'intervalles : $\boxed{x \in \left]-\infty\,;-3\right] \cup \left[3\,;+\infty\right[}$ ou à l'aide d'une valeur absolue : $|x| \geqslant 3$.
Mais ce n'est pas ce qui était demandé car on demandait des inégalités.

---

6 $P(x) = x^2 - 2x - 3$

1°) Forme canonique de $P(x)$.

$$\boxed{P(x) = (x-1)^2 - 4}$$

Attention, une écriture telle que $P(x) = x(x-2) - 3$ (obtenue en faisant une petite factorisation partielle) n'est pas la forme canonique de $P(x)$ (car la variable x figure à deux endroits).

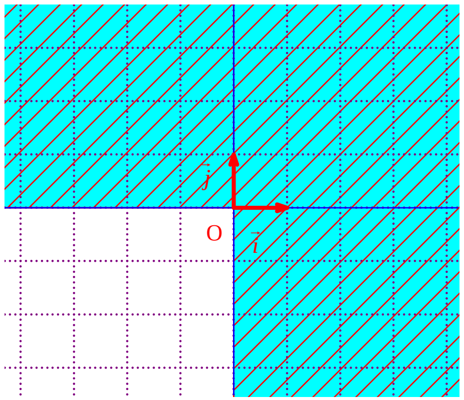
2°) Calcul du discriminant Δ de $P(x)$.

$$\boxed{\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16}$$

Remarque très importante :
Attention, ne pas écrire $\Delta = b^2 - 4ac$ sans avoir précisé préalablement ce que désignent les lettres a, b, c.

---

7 **Logique (ensembles) sur le connecteur « ou ».**



La conjonction « ou » en mathématiques est un connecteurs logique.
Il a un **sens inclusif**.

9 $f : x \mapsto \sqrt{5-x}$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{4-x^2}$

$\boldsymbol{D} = \left]-\infty\,;5\right]$	$\boldsymbol{D}' = \mathbb{R} \setminus \{2\,;-2\}$

Solution détaillée :

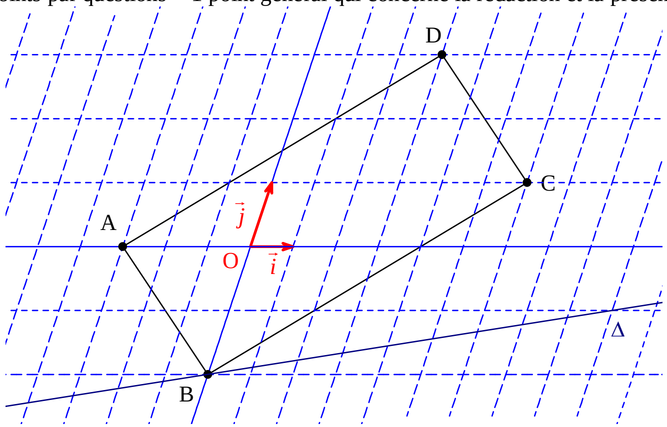
$f(x)$ existe si et seulement si $5 - x \geq 0$
si et seulement si $x \leq 5$

$g(x)$ existe si et seulement si $x^2 - 4 \neq 0$
si et seulement si $x^2 \neq 4$
si et seulement si $x \neq 2$ et $x \neq -2$

---

10 A(– 3, 0), B(0, – 2), C(6, 1), D(3, 3).

Le barème est de 2 points par questions + 1 point général qui concerne la rédaction et la présentation des calculs.



1°) Démontrons que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

$\overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix}3\\-2\end{matrix}\right.$ $\qquad$ $\overrightarrow{DC}\left|\begin{matrix}3\\-2\end{matrix}\right.$

On a donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
Par suite, ABCD est un parallélogramme.

2°) Déterminons une équation cartésienne de la droite Δ, parallèle à (AC) passant par B.

M(x, y) est un point quelconque du plan.

$$M \in \Delta \text{ si et seulement si } \overrightarrow{BM}\begin{vmatrix} x \\ y+2 \end{vmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC}\begin{vmatrix} 9 \\ 1 \end{vmatrix} \text{ sont colinéaires}$$

$$\text{si et seulement si } \begin{vmatrix} x & 9 \\ y+2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{si et seulement si } x \times 1 - 9(y+2) = 0$$

$$\text{si et seulement si } x - 9y - 18 = 0$$

L'égalité $x - 9y - 18 = 0$ est une équation cartésienne de Δ.

Attention au démarrage : « M ∈ Δ si et seulement si … » et pas « Δ // (AC) si et seulement si … »

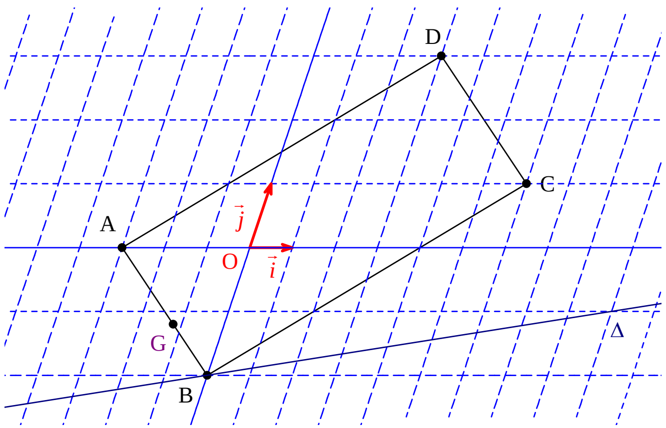
3°) Déterminer les coordonnées de E, point d'intersection de Δ avec l'axe des abscisses.

On peut écrire : Δ ∩ (Ox) = { E }.

E ∈ (Ox) donc $y_E = 0$.

Or E ∈ Δ donc $x_E - 9y_E - 18 = 0$ d'où $x_E - 18 = 0$ soit $x_E = 18$.

4°) Calculons les coordonnées du point G, barycentre des points pondérés (A, 2) et (B, 3).



On applique la formule donnant les coordonnées d'un barycentre (beaucoup plus simple que de refaire la démonstration).

$$G \begin{vmatrix} x_G = \dfrac{2x_A + 3x_B}{2+3} = \dfrac{2\times(-3) + 3\times 0}{5} = -\dfrac{6}{5} \\ y_G = \dfrac{2y_A + 3y_B}{2+3} = \dfrac{2\times 0 + 3\times(-2)}{5} = -\dfrac{6}{5} \end{vmatrix}$$

Démontrons que G ∈ (OD).

$$\overrightarrow{OG}\begin{vmatrix} -\dfrac{6}{5} \\ -\dfrac{6}{5} \end{vmatrix} \qquad \overrightarrow{OD}\begin{vmatrix} 3 \\ 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{6}{5} & 3 \\ -\dfrac{6}{5} & 3 \end{vmatrix} = \left(-\dfrac{6}{5}\right)\times 3 - \left(-\dfrac{6}{5}\right)\times 3 = -\dfrac{18}{5} + \dfrac{18}{5} = 0$$

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{OG}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont colinéaires.
Comme ils ont un point commun, on peut dire que les points O, G, D sont alignés.
On en déduit que G ∈ (OD).

---

11 Algorithmique

Quelles sont les variables informatiques utilisées dans cet algorithme ?

a, *b*, *c*, *n*

Quel est le nombre de sortie lorsque le nombre d'entrée est 2 ?

16

---

12 Logique

1°)

Cette implication est-elle vraie ? **Oui**

« Si $xy > 1$, alors $x > 1$ **et** $y > 1$. »

L'implication réciproque est-elle vraie ? Non (contre-exemple : x = 0,5 et y = 4).

« Si $xy \leqslant 1$, alors $x \leqslant 1$ ou $y \leqslant 1$. »

2°)

« Si $x \neq 0$ **et** $y \neq 0$, alors $xy \neq 0$. »