1ère S1 **Devoir pour le lundi 18 octobre 2010**

I. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4 - 16x^2 + 64 = 0$ (1) et l'inéquation $\frac{1}{x} \geq x$ (2).

La résolution doit être présentée et rédigée selon le modèle ci-dessous :

« L'équation (1) est successivement équivalente à :

……………

……………

……………

L'ensemble des solutions de (1) est $S_1 = \ldots$ ».

II. Algorithmique et géométrie

Le but de cet exercice est d'étudier des algorithmes qui demandent les coordonnées de quatre points A, B, C, D et qui teste si le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

1°) Algorithme 1

Cet algorithme est basé sur la propriété d'**égalité de vecteurs**.

On rappelle la propriété : « ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ».

Application :

Pour déterminer si le quadrilatère ABCD est un parallélogramme il suffit de comparer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.
S'ils sont égaux, alors ABCD est un parallélogramme.
S'ils ne sont pas égaux, alors ABCD n'est pas un parallélogramme.

Cette propriété permet d'écrire l'algorithme suivant rédigé langage naturel (avec une instruction conditionnelle).

Variables
x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C, x_D, y_D, x_U, y_U, x_V, y_V
Entrées
Saisir x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C, x_D, y_D
Traitement
Affecter à x_U la valeur $(x_B - x_A)$
Affecter à y_U la valeur $(y_B - y_A)$
Affecter à x_V la valeur $(x_C - x_D)$
Affecter à y_V la valeur $(y_C - y_D)$
Sortie
Si $x_U = x_V$ et $y_U = y_V$
Alors afficher « ABCD est un parallélogramme »
Sinon afficher « ABCD n'est pas un parallélogramme »

a) On va programme cet algorithme sur ALGOBOX et représenter le parallélogramme.

Effectuer ce travail sur ordinateur en suivant le programme ci-dessous (attention aux deux signes =).

```
VARIABLES
xA EST_DU_TYPE NOMBRE
yA EST_DU_TYPE NOMBRE
xB EST_DU_TYPE NOMBRE
yB EST_DU_TYPE NOMBRE
xC EST_DU_TYPE NOMBRE
yC EST_DU_TYPE NOMBRE
xD EST_DU_TYPE NOMBRE
yD EST_DU_TYPE NOMBRE
xU EST_DU_TYPE NOMBRE
yU EST_DU_TYPE NOMBRE
xV EST_DU_TYPE NOMBRE
yV EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
LIRE xA
LIRE yA
LIRE xB
LIRE yB
LIRE xC
LIRE yC
LIRE xD
LIRE yD
xU PREND_LA_VALEUR xB-xA
yU PREND_LA_VALEUR yB-yA
xV PREND_LA_VALEUR xC-xD
yV PREND_LA_VALEUR yC-yD
SI (xU==xV ET yU==yV) ALORS
DEBUT_SI
AFFICHER "ABCD est un parallélogramme"
FIN_SI
SINON
DEBUT_SINON
AFFICHER "ABCD n'est pas un parallélogramme"
FIN_SINON
TRACER_SEGMENT (xA,yA)->(xB,yB)
TRACER_SEGMENT (xB,yB)->(xC,yC)
TRACER_SEGMENT (xC,yC)->(xD,yD)
TRACER_SEGMENT (xD,yD)->(xA,yA)
FIN_ALGORITHME
```

b) Recopier le tableau ci-dessous et compléter la dernière colonne en utilisant le programme (ce qui permettra de le tester).

A	B	C	D	Nature de ABCD
(0 ; 1)	(5 ; 3)	(9 ; 0)	(4 ; – 2)	
(– 2 ; 4)	(4 ; 2)	(0 ; – 1)	(– 3 ; 0)	
(8 ; 1)	(1 ; – 2)	(1 ; –5)	(8 ; – 2)	
(2 ; 1)	(1 ; 2)	(– 2 ; – 1)	(– 1 ; – 2)	
(– 2 ; 3)	(1 ; 6)	(10 ; 2)	(7 ; – 1)	
(– 2 ; – 3)	(–1 ; 1)	(3 ; 0)	(2 ; – 4)	
(– 1 ; – 1)	(5 ; 3)	(0 ; 5)	(4 ; – 4)	

c) Démontrer « à la main » sur la copie le résultat des deux premières lignes.
2°) Algorithme 2

On considère l'algorithme rédigé ci-dessous en langage naturel.

Variables
x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C, x_D, y_D, x_K, y_K, x_L, y_L
Entrées
Saisir x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C, x_D, y_D
Traitement
Affecter à x_K la valeur $\dfrac{x_A + x_C}{2}$
Affecter à y_K la valeur $\dfrac{y_A + y_C}{2}$
Affecter à x_L la valeur $\dfrac{x_B + x_D}{2}$
Affecter à y_L la valeur $\dfrac{y_B + y_D}{2}$
Sortie
Si $x_K = x_L$ et $y_K = y_L$
Alors afficher « ABCD est un parallélogramme »
Sinon afficher « ABCD n'est pas un parallélogramme »

a) Expliquer pourquoi cet algorithme donne le même résultat que l'algorithme 1.
Sur quelle propriété est-il basé ? Citer cette propriété en recopiant et en complétant la phrase :
« ABCD est un parallélogramme si et seulement si …………………….. ».

b) Programmer cet algorithme sur ALGOBOX et tester cet algorithme avec les points du tableau donné dans le 1°).

III. QCM

Pour chaque question, il y a une ou plusieurs bonnes réponses.
Indiquer lesquelles en justifiant par un calcul. On pourra utiliser XCas pour vérifier les réponses.

On fera tous les traits de fractions et les racines carrées à la règle.

① Pour $x > 1$, $\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$ est égal à :

A $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)^2$ **B** 1 **C** $x-\sqrt{x^2-1}$

② Pour tous nombres réels x et y tels que $x > y \geq 0$, l'expression $\dfrac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ est égale :

A $\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}$ **B** $\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x-y}\right)}{x-y}$ **C** $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x-y}}$

IV. Calculer les expressions suivantes.

On détaillera les calculs sur la copie en soignant la présentation des calculs (on tirera en particulier les traits de fractions à la règle). Encadrer tous les résultats en rouge à la règle.
On pourra utiliser XCas pour vérifier certaines réponses.

$\mathrm{A} = \dfrac{1}{\sqrt{3}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$; $\mathrm{B} = \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1\right)$; $\mathrm{C} = \left(\sqrt{2}-1\right)^3$; $D = \left(\sqrt{2}-1\right)^{50}\times\left(\sqrt{2}+1\right)^{50}$.

V. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\ 2\ \}$ par $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$.

Le but de l'exercice est d'étudier le sens de variation de f sur chacun des intervalles $\mathrm{I}_1 = \left]2\,;+\infty\right[$ et $\mathrm{I}_2 = \left]-\infty\,;2\right[$.

1°) **Sens de variation de *f* sur I_1**

Soit u et v deux réels quelconques dans l'intervalle I_1 tels que $u < v$.
a) Calculer $f(u) - f(v)$. On donnera une expression sous la forme d'un seul quotient en fonction de u et v.
Tirer les traits de fraction à la règle.
b) Comparer $f(u)$ et $f(v)$. En déduire le sens de variation de f sur I_1.
On conclura ainsi : « La fonction f est donc ……………………………………….. sur I_1. »

2°) **Sens de variation de *f* sur I_2**

A l'aide d'une démarche analogue à celle du 1°), déterminer le sens de variation de f sur I_2.

3°) **Tableau de variation**

Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R} \setminus \{\ 2\ \}$. On effectuera le tableau ainsi que les flèches de variation à la règle.
Tracer la courbe représentative de f sur Geogebra (il n'est pas demander d'imprimer cette courbe) et contrôler graphiquement les variations de f.