1ère S1 **Devoir pour le mercredi 29 septembre 2010**

I. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $4x^3+2x^2-2x-1=0$ (1).

II. On rappelle le résultat suivant :

La diagonale d'un carré de côté a ($a \in \mathbb{R}_+^*$) mesure $a\sqrt{2}$.

On notera que ce résultat reste également valable pour la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueur a.

La démonstration de cette propriété est très facile avec le théorème de Pythagore.
Ce résultat est à savoir et à appliquer directement dans les exercices.
Soit ABCD un carré de côté a $\left(a \in \mathbb{R}_+^*\right)$. On note O le centre du carré et $\mathcal{C}$ le cercle de centre C passant par O.
Le cercle $\mathcal{C}$ coupe les côtés [BC] et [CD] respectivement en I et J.
Calculer la longueur IJ.

III. On encadre un champ carré de côté 2 hm par une bande de largeur x en hm ($x>0$) de chaque côté. On obtient un nouveau champ d'aire double, dont les côtés sont parallèles à ceux du premier champ.
Le but de l'exercice est de calculer x.
1°) Faire une figure.
2°) Quelle est l'aire du champ initial ?
3°) Quel est le côté du nouveau champ en fonction de x ?
4°) Mettre le problème en équation et préciser la condition sur x.
5°) Résoudre cette équation.
6°) Conclure.

IV. Le but de cet exercice est de **démontrer** les deux propriétés rappelées ci-dessous de la valeur absolue d'une autre manière que celle du cours, en utilisant l'expression de la valeur absolue d'un réel en fonction de son signe.

P_1 : pour tout couple (x, y) de réels on a : $|xy|=|x|\times|y|$.

P_2 : pour tout couple (x, y) de réels tels que $y \neq 0$ on a : $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$.

Il s'agit de **démontrer** ces propriétés, donc on ne suppose pas ces propriétés connues.

1°) Soit a un réel quelconque. Recopier et compléter la propriété :

$$|a| = \begin{cases} \dots & \text{si } \dots\dots\dots \\ \dots & \text{si } \dots\dots\dots \end{cases}$$

2°) Recopier et compléter le tableau ci-contre en utilisant la propriété rappelée au 1°).

	1er cas : $x \geq 0$ $y \geq 0$	**2e cas :** $x \geq 0$ $y \leq 0$	**3e cas :** $x \leq 0$ $y \geq 0$	**4e cas :** $x \leq 0$ $y \leq 0$
$\lvert x \rvert$				
$\lvert y \rvert$				
$\lvert x \rvert \times \lvert y \rvert$				
$\lvert xy \rvert$				

En déduire la propriété P_1.

3°) Démontrer la propriété P_2 d'une manière analogue à celle du 2°).

V. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x|+2x-4=0$ (E).

Indication :

Envisager deux cas selon que $x \geq 0$ ou que $x<0$.

Rédiger selon le modèle ci-dessous (ne rien écrire sur cette feuille).

1er cas : $x \geq 0$

(E) est alors successivement équivalente à

…..

…..

…..

L'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{R}_+$ est S_1 = ……….

2e cas : $x < 0$

(E) est alors successivement équivalente à

…..

…..

…..

L'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{R}_-^*$ est S_2 = ……….

Conclusion :

L'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{R}$ est S = ……….

1$^{\text{ère}}$ S1 **Corrigé du devoir pour le 29 septembre 2010**

Quelques objectifs de ce devoir :

Travailler la rédaction (liens logiques à mettre, notamment l'équivalence pour les équations).
Travailler un type de raisonnement peu pratiqué au collège et en seconde : le raisonnement par disjonction de cas.

Conseils de rédaction :

Pour les équations et inéquations,

« L'équation (1) est successivement équivalente à … »

« L'ensemble des solutions de l'équation (1) est : S = ……………. ».

Soigner la présentation en encadrant tous les résultats demandés en rouge à la règle.

I. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $4x^3+2x^2-2x-1=0$ (1).

Cette équation est successivement équivalente aux équations suivantes :

$2x^2(2x+1)-(2x+1)=0$

$2x^2\underbrace{(2x+1)}-\underbrace{(2x+1)}\times 1=0$

$(2x+1)(2x^2-1)=0$

$(2x+1)(\sqrt{2}x-1)(\sqrt{2}x+1)=0$ (il est inutile de dire que l'on est dans une situation produit nul et de citer la règle)

$2x+1=0$ ou $\sqrt{2}x+1=0$ ou $\sqrt{2}x-1=0$

$x=-\dfrac{1}{2}$ ou $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ou $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$x=-\dfrac{1}{2}$ ou $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

L'ensemble des solutions de (1) est $\boxed{S=\left\{-\dfrac{1}{2}\,;-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}}$.

II. On fait une figure soignée sur laquelle on trace le segment [IJ] (puisque l'on doit calculer sa longueur).
On écrit les hypothèses.

On va appliquer deux fois le résultat rappelé dans l'énoncé sur la diagonale d'un carré (cela est beaucoup plus court que d'appliquer le théorème de Pythagore).

On a : $\text{AC}=a\sqrt{2}$ (diagonale d'un carré de côté a).
Or O est le centre du carré ABCD donc O est le milieu du segment [AC].

Par suite, on a : $\text{CO}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Donc, comme I et J appartiennent au cercle $\mathcal{C}$, on en déduit que $\text{CI}=\text{CJ}=\text{CO}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Par conséquent, CIJ est un triangle rectangle isocèle en C.

Donc, en réappliquant la propriété rappelée dans l'énoncé, on en déduit que : $\text{IJ}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}=a$.

III.

2°) L'aire du champ initial est de 4 hm².

3°) Le côté du nouveau du nouveau champ est égal à $2x+2$.

4°) **Mise en équation du problème et condition sur x :**

$$\begin{cases}(2x+2)^2=8 \quad (1)\\ x>0\end{cases}$$

5°) **Résolution de l'équation (1)**
L'équation (1) est successivement équivalente aux équations suivantes :

$2x+2=\sqrt{8}$ ou $2x+2=-\sqrt{8}$

$2x+2=2\sqrt{2}$ ou $2x+2=-2\sqrt{2}$

$x+1=\sqrt{2}$ ou $x+1=-\sqrt{2}$ (simplification des deux égalités par 2)

$x=\sqrt{2}-1$ ou $x=-\sqrt{2}-1$

6°) **Conclusion**

Compte tenu de la condition $x>0$, on en déduit que $\boxed{x=\sqrt{2}-1}$.

IV. Démonstration de deux propriétés du cours sur la valeur absolue.
On aborde dans cet exercice la notion de **raisonnement par disjonction de cas**.

1°)

$$|\,a\,|=\begin{cases}a & \text{si } a\geqslant 0\\ -a & \text{si } a\leqslant 0\end{cases}$$

2°) Démontrons la propriété P_1.

	1^er^ cas : $x \geq 0$ $y \geq 0$	**2^e^ cas :** $x \geq 0$ $y \leq 0$	**3^e^ cas :** $x \leq 0$ $y \geq 0$	**4^e^ cas :** $x \leq 0$ $y \leq 0$
$\lvert x \rvert$	x	x	$-x$	$-x$
$\lvert y \rvert$	y	$-y$	y	$-y$
$\lvert x \rvert \times \lvert y \rvert$	$x \times y$	$x \times (-y) = -xy$	$(-x) \times y = -xy$	$(-x) \times (-y) = xy$
$\lvert xy \rvert$	$x \times y$	$-xy$	$-xy$	xy

On compare les résultats des lignes de $\lvert x \rvert \times \lvert y \rvert$ et $\lvert xy \rvert$. On constate qu'ils sont égaux à chaque fois.

On en déduit la propriété P_1 : pour tout couple (x, y) de réels on a : $\lvert xy \rvert = \lvert x \rvert \times \lvert y \rvert$.

N.B. : Dans cet exercice, il ne s'agit pas tout à fait d'une disjonction de cas ; il faudrait mettre des inégalités strictes dans certains cas.

3°) Démontrons la propriété P_2.

Attention, comme *y* est non nul, on doit bien écrire des **inégalités strictes** pour *y*.

	1^er^ cas : $x \geq 0$ $y > 0$	**2^e^ cas :** $x \geq 0$ $y < 0$	**3^e^ cas :** $x \leq 0$ $y > 0$	**4^e^ cas :** $x \leq 0$ $y < 0$
$\lvert x \rvert$	x	x	$-x$	$-x$
$\lvert y \rvert$	y	$-y$	y	$-y$
$\dfrac{\lvert x \rvert}{\lvert y \rvert}$	$\dfrac{x}{y}$	$\dfrac{x}{-y} = -\dfrac{x}{y}$	$\dfrac{-x}{y} = -\dfrac{x}{y}$	$\dfrac{-x}{-y} = \dfrac{x}{y}$
$\left\lvert \dfrac{x}{y} \right\rvert$	$\dfrac{x}{y}$	$-\dfrac{x}{y}$	$-\dfrac{x}{y}$	$\dfrac{x}{y}$

On compare les résultats des lignes de $\dfrac{\lvert x \rvert}{\lvert y \rvert}$ et $\left\lvert \dfrac{x}{y} \right\rvert$. On constate qu'ils sont égaux à chaque fois.

On en déduit la propriété P_2 : pour tout couple (x, y) de réels tels que $y \neq 0$ on a : $\left\lvert \dfrac{x}{y} \right\rvert = \dfrac{\lvert x \rvert}{\lvert y \rvert}$.

V. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\lvert x \rvert + 2x - 4 = 0$ (E).

Il s'agit d'un exercice sur le raisonnement par disjonction de cas (lors de la résolution d'une équation).

1^er^ cas : $x \geq 0$

(E) est alors successivement équivalente à

$x + 2x - 4 = 0$
$3x - 4 = 0$
$x = \dfrac{4}{3}$

$\dfrac{4}{3} \geq 0$

L'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{R}_+$ est $S_1 = \left\{ \dfrac{4}{3} \right\}$.

2^e^ cas : $x < 0$

(E) est alors successivement équivalente à

$-x + 2x - 4 = 0$
$x - 4 = 0$
$x = 4$

$4 < 0$

L'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{R}_-^*$ est $S_2 = \varnothing$.

Conclusion :

L'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{R}$ est $S = S_1 \cup S_2 = \left\{ \dfrac{4}{3} \right\}$.