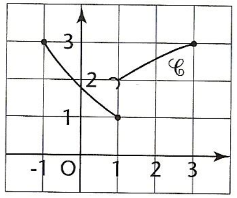
TS

Exercices sur la continuité (1)

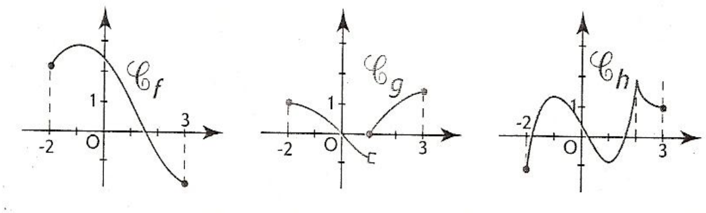
$\boxed{1}$ Soit *f* est la fonction définie sur l'intervalle [– 1 ; 3] dont la courbe représentative ***C*** est tracée ci-contre.

1°) Lire graphiquement les limites à droite et à gauche de *f* en 1.

2°) La fonction *f* admet-elle une limite en 1 ? Est-elle continue en 1 ?



$\boxed{2}$ On donne ci-dessous les courbes représentatives de trois fonctions *f*, *g*, *h* définies sur l'intervalle [– 2 ; 3] dans le plan muni d'un repère.



1°) Dire dans chaque cas si la fonction est continue sur l'intervalle [– 2 ; 3] (sans justifier).

2°) Si la fonction n'est pas continue sur [– 2 ; 3], citer un intervalle fermé sur lequel elle est continue.

$\boxed{3}$ On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ pour $x\neq 0$ et $f(0)=1$.

Étudier la continuité de *f* en 0.

$\boxed{4}$ 1°) On considère la fonction *f* définie sur $\mathrm{I}=[1\,;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x-1}$. Étudier la continuité de f sur I.

2°) On considère la fonction *f* définie sur I = $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{x^2+1}$. Étudier la continuité de f sur I.

3°) On considère la fonction *f* définie sur I = $\mathbb{R}$ par $f(x)=4x^3-5x^2+x-1$. Étudier la continuité de f sur I.

4°) On considère la fonction *f* définie sur I = $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{-2x^3+4x^2-x-3}{4x^2+2}$. Étudier la continuité de f sur I.

5°) On considère la fonction *f* définie sur I = $\mathbb{R}$ par $f(x)=\left|x^2-3x+2\right|$. Étudier la continuité de f sur I.

$\boxed{5}$ 1°) On considère la fonction *f* définie par $f(x)=\sqrt{x^2+3x-4}$.

Déterminer l'ensemble de définition ***D*** de *f* et étudier la continuité de f sur ***D***.

2°) On considère la fonction *f* définie par $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2-1}$.

Déterminer l'ensemble de définition ***D*** de *f* et étudier la continuité de f sur ***D***.

$\boxed{6}$ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{3x^2-x-2}{x-1}$ pour $x\neq 1$ et $f(1)=5$.

Démontrer que, pour tout réel *x*, on a : $f(x)=3x+2$. En déduire que la fonction *f* est continue sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{7}$ On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x-3$ pour $x<2$ et $f(x)=x^2-5$ pour $x\geq 2$.

1°) **Calculs d'images**

La fonction *f* est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par deux expressions différentes sur les intervalles]– ∞ ; 2[et e [2 ; + ∞ [. Pour calculer l'image d'un réel, on utilise la première expression si ce réel est strictement inférieur à 2 et la deuxième expression si ce réel est supérieur ou égal à 2.

Calculer les images de 1, 2 et 3 par *f*.

2°) **Étude de la continuité de *f***

a) **Étude de la continuité sur les deux intervalles ouverts]– ∞ ; 2[et]2 ; + ∞ [** (on notera bien que les deux intervalles sont ouverts).

À quelle famille de fonctions usuelles appartient la restriction de la fonction f à l'intervalle]– ∞ ; 2[? la restriction de f à l'intervalle]2 ; + ∞ [? (Répondre sans justifier).

En déduire que *f* est continue en tout réel $x\neq 2$.

b) **Étude de la continuité en 2**

Déterminer $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$. La fonction *f* est-elle continue en 2 ?

c) Conclure sur la continuité de *f* sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{8}$ On considère la fonction *f* définie $f(x)=x-1$ pour $x\leqslant 1$ et $f(x)=2-mx$ pour $x>1$ où *m* est un réel.

Pour quelle valeur de *m* la fonction f est-elle continue en 1 ?

$\boxed{9}$ Rappeler la définition de la partie entière d'un réel *x*.

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $\mathrm{E}(x)=1$ (1) ; $\mathrm{E}(x)=-1$ (2) ; $\mathrm{E}(x)=\dfrac{1}{3}$ (3).

On notera S_1, S_2, S_3 les ensembles de solutions respectifs.

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $\mathrm{E}(2x)=3$ (4) ; $\mathrm{E}(x+5)=3$ (5) ; $\mathrm{E}(-x)=-3$ (6) ; $\mathrm{E}(x^2)=0$ (7).

On notera S_4, S_5, S_6, S_7 les ensembles de solutions respectifs.

$\boxed{10}$ On considère la fonction $f : x\mapsto\left[x-\mathrm{E}(x)\right]^2+\mathrm{E}(x)$.

1°) Exprimer $f(x)$ en fonction de *x* pour $x\in[0\,;1[$ et pour $x\in[1\,;2[$.

2°) La fonction *f* est-elle continue en 1?

$\boxed{11}$ On considère la fonction $f : x\mapsto x\mathrm{E}(x)$.

1°) Exprimer $f(x)$ en fonction de *x* pour $x\in[-1\,;3]$.

2°) Tracer la représentation de f sur l'intervalle $x\in[-1\,;3]$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 1 cm (ou un « gros » carreau). Prendre une demi-page complète. On soignera particulièrement les « points d'arrêt » de la représentation graphique. On pourra vérifier à l'aide de la calculatrice graphique.

$\boxed{12}$ On considère la fonction *f* définie par $f(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\mathrm{E}(x)\right)$.

1°) Démontrer que *f* est périodique de période 4. Donner un intervalle auquel on peut limiter l'étude de *f*.

2°) Tracer la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j})$ en prenant pour unités graphiques 1 cm en abscisse et 4 cm en ordonnée.

On soignera particulièrement les « points d'arrêt » de la représentation graphique. On pourra vérifier à l'aide de la calculatrice graphique ou d'un logiciel de tracé de courbe.

$\boxed{\textbf{13}}$ On considère la fonction *f* définie par $f\left(x\right)=x-\mathrm{E}\left(x\right)$. La fonction *f* est appelée fonction **partie décimale**.
1°) Démontrer que *f* est périodique de période 1. A quel intervalle peut-on limiter l'étude de *f* ?
2°) Tracer la représentation graphique $\mathcal{C}$ de *f* sur $\mathbb{R}$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité graphique : 2 cm).
On soignera particulièrement les « points d'arrêt » de la représentation graphique. On pourra vérifier à l'aide de la calculatrice graphique ou d'un logiciel de tracé de courbe.

$\boxed{\textbf{14}}$ 1°) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{E}\left(x\right)$.

2°) a) Démontrer que pour tout réel *x*, on a : $x-1<\mathrm{E}\left(x\right)\leq x$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{E}\left(x\right)}{x}$.

Classification des exercices par compétences

Compétence	Exercices
Approche graphique de la notion de fonction continue	$\boxed{\textbf{1}}$ et $\boxed{\textbf{2}}$.
Étudier la continuité d'une fonction en un réel : démontrer qu'une fonction est continue ou n'est pas continue (c'est-à-dire discontinue) en un réel	$\boxed{\textbf{3}}$ et $\boxed{\textbf{8}}$.
Étudier la continuité d'une fonction sur un intervalle : démontrer qu'une fonction est continue ou n'est pas continue sur un intervalle	$\boxed{\textbf{4}}$ à $\boxed{\textbf{7}}$.
Utiliser la définition et les propriétés de la fonction partie entière	$\boxed{\textbf{9}}$ et $\boxed{\textbf{14}}$.

Réponses

$\boxed{1}$ Continuité d'une fonction en un réel

Cet exercice a pour but de travailler la notion de fonction continue ou discontinue en un réel (idée intuitive et justification par la définition).

Indications sommaires :

1°) On rédige ainsi : « Graphiquement, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$ »
2°) La fonction f n'admet pas de limite en 1 donc elle n'est pas continue en 1.

Solution détaillée :

f est définie sur l'intervalle [– 2 ; 3].

1°) **Limites**

f admet une limite en 1 à gauche égale à 1.
f admet une limite en 1 à droite égale à 2.

2°) **Continuité**

Ces deux limites sont différentes.
Par conséquent, la fonction f n'admet pas de limite en 1 et par suite f n'est pas continue en 1.

$\boxed{2}$ Continuité d'une fonction en un réel et sur un intervalle

Cet exercice a pour but de reprendre l'idée intuitive de fonction continue sur un intervalle (courbe sans lever le crayon).

Attention, on dit qu'une onction est continue ou discontinue sur un intervalle mais pas qu'une courbe est continue ou discontinue (les mots « continues » et « discontinues » marchent avec le mot fonction, et non avec le mot « courbe »).

Solution détaillée :

1°) f et h sont continues sur leur intervalle de définition [– 2 ; 3].
g n'est pas continue sur l'intervalle [– 2 ; 3].(car elle n'est pas continue en 1).

2°) g est continue sur l'intervalle[– 2 ; 0] (on peut aussi mettre l'intervalle [1 ; 3], ou l'intervalle [2 ; 3]).

$\boxed{3}$ Continuité d'une fonction en un réel

Difficulté pour les élèves de comprendre que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Faire un schéma :

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin x}{x} \ (\text{si } x \neq 0) \\ 0 & \longmapsto & 1 \end{array}$$

Bien dire que la valeur de $f(0)$ a été choisie arbitrairement par l'énoncé.

Solution détaillée :

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (limite de référence)
On constate que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0.

$\boxed{4}$ Continuité de fonctions sur un intervalle

Cet exercice a pour but de justifier la continuité d'une fonction sur un intervalle.

Méthode pour le 1°), 2°) et 5°) : on écrit $f = v \circ u$ où u et v sont les fonctions définies par $u(x) = ...$ et $v(x) = ...$
On commence par définir deux fonctions u et v telles que $f = v \circ u$.
On ne précise pas leurs ensembles de définition.
On dit ensuite « u et v sont continues sur leurs ensembles de définition respectifs donc f est continue sur son ensemble de définition ».

Solution détaillée :

1°) $f : x \mapsto f(x) = \sqrt{x-1}$ définie sur $\mathrm{I} = [1 ; +\infty[$

On commence par faire un schéma pour décomposer f (c'est-à-dire écrire f comme composée de deux fonctions).

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "u"] \arrow[rr, bend left, "f"] & x-1 \arrow[r, mapsto, "v"'] & \sqrt{x-1} \end{tikzcd}$$

$$X \longmapsto \sqrt{X}$$

On passe de x à $f(x)$ en enchaînant la fonction $u : x \mapsto x - 1$ suivie de la fonction « racine carrée » $v : x \mapsto \sqrt{x}$.

On pose $u(x) = x - 1$ et $v(x) = \sqrt{x}$ (on définit les deux fonctions u et v à l'aide de la même variable x, qui est ce que l'on appelle une « variable muette »).
f est la composée de u suivie de v.
On peut écrire $f = v \circ u$ (attention à l'ordre, la composition des fonctions n'est pas commutative).
« rond »

u et v sont continues sur leurs ensembles de définition respectifs (u sur $\mathbb{R}$ et v sur $\mathbb{R}_+$).

Donc f est continue sur son ensemble de définition qui est [1 ; + ∞[.

2°) $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ définie sur I = $\mathbb{R}$

On pose $u(x) = x^2+1$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

f est la composée de *u* suivie de *v* (*f* = *v* o *u*)

u et *v* sont continues sur leurs ensembles de définition respectifs (*u* sur $\mathbb{R}$ et *v* sur $\mathbb{R}_+$).

Donc *f* est continue sur son ensemble de définition qui est $\mathbb{R}$.

3°) $f : x \mapsto 4x^3-5x^2+x-1$ définie sur I = $\mathbb{R}$

f est une fonction polynôme.
Donc *f* est continue sur son ensemble de définition qui est $\mathbb{R}$.

4°) $f : x \mapsto \dfrac{-2x^3+4x^2-x-3}{4x^2+2}$ définie sur I = $\mathbb{R}$

f est une fonction rationnelle.
Donc *f* est continue sur son ensemble de définition qui est $\mathbb{R}$.

5°) $f : x \mapsto \left| x^2-3x+2 \right|$ définie sur I = $\mathbb{R}$

On pose $u(x) = x^2-3x+2$ et $v(x) = |\,x\,|$.

f est la composée de *u* suivie de *v* (*f* = *v* o *u*)

u et *v* sont continues sur leurs ensembles de définition respectifs ($\mathbb{R}$ pour les deux fonctions).

Donc *f* est continue sur son ensemble de définition qui est $\mathbb{R}$.

5 Continuité de fonctions sur un intervalle

1°) $f : x \mapsto \sqrt{x^2+3x-4}$

D =]– ∞ ; – 4] ∪ [1 ; + ∞[(étudier le signe de la fonction polynôme x^2+3x-4)

f est continue sur ***D*** comme composée de fonctions continues (voir exercice **4**).

2°) $f : x \mapsto \dfrac{2x+3}{x^2-1}$

D = $\mathbb{R}$ \ {– 1 ; 1}

f est une fonction rationnelle donc elle est continue sur son ensemble de définition (elle est continue sur chacun des intervalles]– ∞ ; – 1[,]– 1 ; 1[et]1 ; + ∞[).

La courbe représentative de la fonction *f* est constituée de trois morceaux séparés par des asymptotes.

Chaque morceau est tracé sans lever le crayon.

6 Continuité d'une fonction sur un intervalle

$f(x) = \dfrac{3x^2-x-2}{x-1}$ pour $x \neq 1$
$f(1) = 5$

N.B. : À la base, *f* est une fonction rationnelle.

La fonction *f* est une fonction affine donc elle est continue sur $\mathbb{R}$.

7 $f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{pour } x<2 \\ x^2-5 & \text{pour } x \geq 2 \end{cases}$

2°) a) Attention, on exclut 2 dans les deux intervalles.
b) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-}(x-3) = -1$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(x^2-5) = -1$.
$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -1$
f admet donc une limite en 2 égale à – 1.
Cette limite est égale à $f(2)$ donc *f* est continue en 2.
c) La fonction *f* est continue sur $\mathbb{R}$.

8 La fonction *f* est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $m=2$.

Rédaction à apprendre par cœur :

Pour que *f* soit continue en 1, il faut et il suffit* que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$.
« Il faut et il suffit » expression mathématique à savoir qui traduit une CNS (condition nécessaire et suffisante).

$f(1)=0$
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0$
$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(2-mx) = 2-m$

f est continue en 1 $\Leftrightarrow 2-m=0$
$\Leftrightarrow m=2$

9 Équations et inéquations avec la partie entière

1°) $S_1 = [1\,;2[$; $S_2 = [-1\,;0[$; $S_3 = \varnothing$.
2°) $S_4 = \left[\dfrac{3}{2}\,;2\right[$; $S_5 = [-2\,;-1[$; $S_6 =]2\,;3]$; $S_7 =]-1\,;1[$.

Détail pour la dernière équation :

$(7) \Leftrightarrow 0 \leq x^2 < 1$

$\Leftrightarrow x^2 < 1$

$\Leftrightarrow -1 < x < 1$

Commentaires sur les deux dernières lignes :

$0 \leq x^2$ est toujours vraie donc on laisse tomber cette condition.

Pour résoudre l'inéquation $x^2 < 1$, il y a quatre méthodes :

1ère méthode	2e méthode	3e méthode	4e méthode (variante de la 2e méthode)
$x^2 < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{1}$ $\Leftrightarrow \lvert x \rvert < 1$ $\Leftrightarrow -1 < x < 1$	$x^2 < 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 < 0$ $\Leftrightarrow (x-1)(x+1) < 0$ $\Leftrightarrow -1 < x < 1$ en utilisant un tableau de signes	Graphiquement On utilise la parabole représentative de la fonction carrée.	$x^2 < 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 < 0$ $x^2 - 1$ est un trinôme dont les racines sont – 1 et 1. On applique la règle du signe d'un trinôme.

$\boxed{10}$ 1°) Pour $x \in [1;2[$, on a : $f(x) = x^2$; pour $x \in [1;2[$, on a : $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

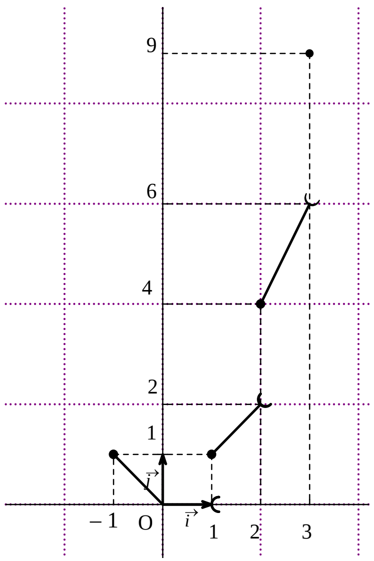
2°) La fonction *f* est continue en 1.

$\boxed{11}$ Si $x \in [-1;0[$, alors $f(x) = -x$; si $x \in [0;1[$, alors $f(x) = 0$; si $x \in [1;2[$, alors $f(x) = x$; si $x \in [2;3[$, alors $f(x) = 2x$; $f(3) = 3\mathrm{E}(3) = 3 \times 3 = 9$.

On trace les droites d'équations réduites $y = 2x$, $y = x$, $y = -x$.

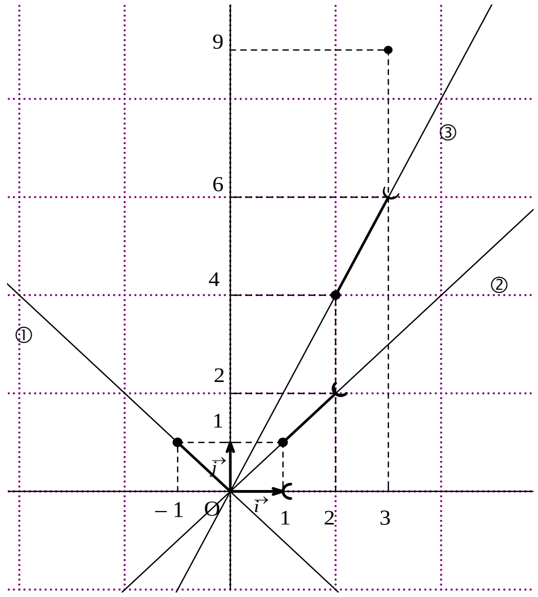
Attention à bien « matérialiser » sur le graphique les extrémités des segments (ouvertes ou fermées).

La représentation graphique est constituée de segments de droites et d'un point.



N.B. : On retrouve un peu ici le même mode de raisonnement que pour les algorithmes.

Méthode :



① Pour $x \in [-1;0[$, $f(x) = -x$; on trace la droite d'équation $y = -x$ et on prend juste la partie pour $x \in [-1;0[$.

② Pour $x \in [1;2[$, $f(x) = x$; on trace la droite d'équation $y = x$ et on prend juste la partie pour $x \in [1;2[$.

③ Pour $x \in [2;3[$, $f(x) = 2x$; on trace la droite d'équation $y = x$ et on prend juste la partie pour $x \in [2;3[$.

On observe un bon raccordement de la représentation graphique de *f* au point O. Cela explique que le point O ne présente aucune marque particulière. La fonction *f* est continue en 0.

La fonction *f* est discontinue en 1, en 2, en 3.

On peut cependant remarquer que *f* est continue en 1 à droite, mais n'est pas continue en 1 à gauche.

De même en 2.

On peut affirmer cela « intuitivement » en observant le graphique (car on est obligé de lever le crayon pour tracer la représentation graphique de *f*), mais on peut également le démontrer rigoureusement en étudiant la limite.

$\boxed{12}$ 1°)

On dit qu'une fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ est périodique de période T pour exprimer que pour tout réel *x* on a :

$f(x + \mathrm{T}) = f(x)$.

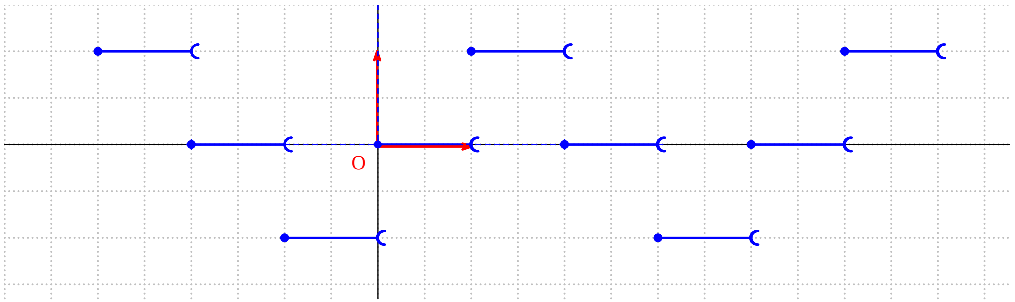
On vérifie que pour tout réel *x*, on a : $f(x+4) = f(x)$.

$f\left(x+4\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}\mathrm{E}\left(x+4\right)\right]=\sin\left[\frac{\pi}{2}\left(\mathrm{E}\left(x\right)+4\right)\right]=\sin\left[\frac{\pi}{2}\mathrm{E}\left(x\right)+\frac{\pi}{2}\times 4\right]\sin\left[\frac{\pi}{2}\mathrm{E}\left(x\right)+2\pi\right]=\sin\left(\frac{\pi}{2}\mathrm{E}\left(x\right)\right)=f\left(x\right)$

.

On peut limiter l'étude de f à un intervalle d'amplitude 4, par exemple [0 ; 4[(on observera que le crochet est fermé en 0 et ouvert en 4). On peut prendre n'importe quel intervalle d'amplitude 4 ; on peut prendre par exemple [2 ; 6[, mais le plus « logique » est [0 ; 4[.

2°) Si $x\in\left[0\,;1\right[$, alors $f\left(x\right)=0$; si $x\in\left[1\,;2\right[$, alors $f\left(x\right)=1$; si $x\in\left[2\,;3\right[$, alors $f\left(x\right)=0$; si $x\in\left[3\,;4\right[$, alors $f\left(x\right)=-1$. La fonction *f* est périodique de période 4 donc $\mathcal{C}$ est globalement invariante par la translation de vecteur $4\vec{i}$. Attention à bien « matérialiser » les extrémités des segments (ouvertes ou fermées).



Vérification sur calculatrice graphique :

Il faut d'abord se mettre en mode radians.

Taper sin((π/2) * Int (*x*)) pour un modèle TI.

Sur *Geogebra*, ne pas oublier que la partie entière d'un réel *x* est notée « floor(*x*) ».

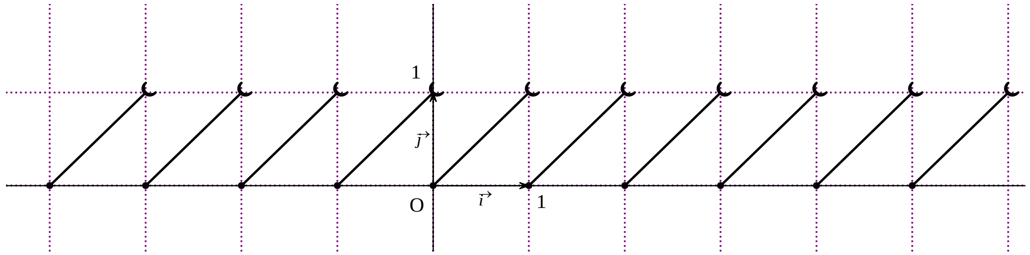
Point à détailler : On observe que la fonction est discontinue en tout entier relatif.
Dire pourquoi *f* n'est pas continue en 0, 1 etc.
La représentation graphique de la fonction *f* fait penser à une onde.

$\boxed{13}$ 1°) On démontre que pour tout réel *x*, on a : $f\left(x+1\right)=f\left(x\right)$.
Donc la fonction *f* est périodique de période 1.
On limite l'étude de f à l'intervalle [0 ; 1[(intervalle d'amplitude 1).
2°) Pour tout $x\in\left[0\,;1\right[$, on a $\mathrm{E}\left(x\right)=0$ donc $f\left(x\right)=x-\mathrm{E}\left(x\right)=x-0=x$ (on remplace uniquement la partie entière par 0).
La fonction *f* est périodique de période 1 donc sa représentation graphique est globalement invariante par la translation de vecteur $\vec{i}$.
La représentation graphique de *f* est constituée de segments de droite fermés à gauche, ouverts à droite.
On trace la représentation graphique de *f* sur $\mathbb{R}$ (pas seulement sur $\left[0\,;1\right[$).

Méthode pour le tracé :

On trace d'abord la portion de représentation graphique sur [0 ; 1[.
On trace la droite Δ d'équation *y* = *x*. On sélectionne la partie de la droite pour $x\in[0\,;1[$.
On obtient le segment [OA[où A est le point de coordonnées (1 ; 1) (ce segment est fermé en O, ouvert en A).

On effectue des translation de vecteur $k\vec{i}$ avec où $k\in\mathbb{Z}$.



f n'est pas continue en tout entier relatif (cependant, en tout entier relatif, *f* est continue à droite, mais n'est pas continue à gauche). On peut affirmer cela « intuitivement » en observant le graphique (car on est obligé de lever le crayon en tout entier relatif pour tracer la représentation graphique de *f*), mais on peut également le démontrer rigoureusement en étudiant la limite à gauche et la limite à droite en un entier relatif.

$\boxed{14}$ **Limites par comparaison (méthode par majoration – minoration)**

1°) On sait que : $\forall x\in\mathbb{R}\quad x<\mathrm{E}\left(x\right)+1$ donc $\forall x\in\mathbb{R}\quad \mathrm{E}\left(x\right)>x-1$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-1\right)=+\infty$ donc d'après l'extension du théorème des gendarmes (ou théorème « du » gendarme)

$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{E}\left(x\right)=+\infty$.

2°) Lorsque *x* tend vers +∞, on rencontre une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

On a $\forall x\in\mathbb{R}\quad \mathrm{E}\left(x\right)\leq x<\mathrm{E}\left(x\right)+1$.

Donc : $\mathrm{E}\left(x\right)\leq x$ (1) et $x<\mathrm{E}\left(x\right)+1$.

La dernière inégalité donne $x-1<\mathrm{E}\left(x\right)$ (2)

Ainsi (1) et (2) donnent : $\forall x\in\mathbb{R}\quad x-1<\mathrm{E}\left(x\right)\leq x$.

Donc $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad 1-\frac{1}{x}<\frac{\mathrm{E}\left(x\right)}{x}\leq 1$ (on est obligé de préciser que *x* est strictement positif puisque l'on divise tous membres de l'encadrement).
On applique le théorème des gendarmes (et non l'extension du théorème des gendarmes).

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}1=1\end{array}\right\}\text{ donc d'après le théorème des gendarmes : }\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{E}\left(x\right)}{x}=1.$$