TS2

Correction du contrôle N°1 du samedi 29 septembre 2007

I. (5 points)

Question	1°)	2°)	3°)	4°)	5°)	6°)	7°)	8°)	9°)	10°)
Réponse	V	F	V	V	F	V	F	V	V	F

1°) f et g sont définies sur $\mathbb{R}^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*\ f(x) = \ln\left(x^2\right) = \ln\left(|\,x\,|^2\right) = 2\ln|\,x\,| = g(x)$.

2°) $\mathrm{e}^{\ln 5} + \mathrm{e}^{-\ln 3} = 5 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{16}{3}$.

3°) Pour tout réel $x \geq 0$, on a :

$$\ln\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right) = \ln\left(\frac{\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\right) = -\ln\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right).$$

4°) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\ \ \ln(2x) = \ln x + \ln 2$ donc on passe de la courbe représentative de la fonction logarithme à la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = \ln(2x)$ par la translation de vecteur $(\ln 2)\vec{j}$.

5°) $\forall x \in \left]-\dfrac{2}{3}\,;+\infty\right[\quad f'(x) = \dfrac{2}{2x+3}$.

6°) $(\ln x)^2 = \ln x\ \ (1)$.

On résout l'équation dans $\mathbb{R}_+^*$.

(1) équivaut à $\ln x \times (\ln x - 1) = 0$

La courbe d'équation $y = (\ln x)^2$ coupe la courbe représentative de la fonction logarithme népérien aux points d'abscisses 1 et e.

7°) $f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} 2-x>0 \\ x>0 \\ \ln x \neq 0 \end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases} x<2 \\ x>0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(2-x)}{\ln x}$ est définie sur $]0\,;1[\cup]1\,;2[$.

8°) $\forall x \in \mathbb{R}\ \ f(x) = \mathrm{e}^{-2x} - \dfrac{\mathrm{e}^{2x}+1}{\mathrm{e}^{2x}} = \mathrm{e}^{-2x} - \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}} - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2x}} = \mathrm{e}^{-2x} - 1 - \mathrm{e}^{-2x} = -1$ donc f est constante.

9°) $\lim\limits_{x \to -\infty}\left[f(x) - (2x+1)\right] = 0$ donc $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $y = 2x+1$ pour asymptote oblique au voisinage de $-\infty$.

10°) On donne un contre-exemple. Pour $x = 0$, on a $\ln\left(\mathrm{e}^0 + 2\right) = \ln 3 \neq 0 + \ln 2$.

II. (3 points)

1°) **Restitution organisée de connaissance**

$\ln\left(\sqrt{m}\times\sqrt{m}\right)=\ln\sqrt{m}+\ln\sqrt{m}=2\ln\sqrt{m}$ donc $\ln\sqrt{m}=\dfrac{1}{2}\ln m$.

2°) $A=7e^{\frac{\ln 3}{2}}-e^{-\frac{\ln 3}{2}}+3e^{\frac{3\ln 3}{2}}=7e^{\ln\sqrt{3}}-e^{-\ln\sqrt{3}}+3\left(e^{\ln\sqrt{3}}\right)^3=7\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}+3\left(\sqrt{3}\right)^3=\dfrac{47}{\sqrt{3}}=\dfrac{47\sqrt{3}}{3}$

$B=\ln\sqrt{e}+\ln\left(e^4\right)-2\ln\dfrac{1}{\sqrt{e}}=\dfrac{1}{2}+4+2\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{11}{2}$.

III. (3 points)

$\ln(2x+1)+\ln(x-3)=\ln(x+5)$ (1)

Condition d'existence : $x>3$

(1) $\Leftrightarrow \ln\left[(2x+1)(x-3)\right]=\ln(x+5)\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x^2-3x-4=0 \Leftrightarrow x=4$ ou $x=-1$

Or $-1\notin\,]3\,;+\infty[$ donc $S_1=\{4\}$

$2\ln x+\ln\dfrac{1}{x}=-1$ (2)

Condition d'existence : $x>0$

(2) $\Leftrightarrow 2\ln x-\ln x=-1\Leftrightarrow \ln x=\ln\dfrac{1}{e}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{e}$

Or $\dfrac{1}{e}\in\,]0\,;+\infty[$ donc $S_2=\left\{\dfrac{1}{e}\right\}$

$\left(e^x-3\right)^2-4=0$ (3)

(3) $\Leftrightarrow \left[\left(e^x-3\right)-2\right]\left[\left(e^x-3\right)+2\right]=0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow e^x=5$ ou $e^x=1\Leftrightarrow x=\ln 5$ ou $x=0$

$S_3=\{0\,;\ln 5\}$

IV. (3 points)

1°) Voir exercice du chapitre 1.

2°) On applique l'inégalité (1) avec $\dfrac{1}{x}$ pour $x>0$.

On obtient : $\ln\dfrac{1}{x}\leq\dfrac{1}{x}-1$ d'où $-\ln x\leq\dfrac{1}{x}-1$.

Donc on a : $1-\dfrac{1}{x}\leq\ln x$ (2).

3°) Pour tout réel $x>0$, on a : $1-\dfrac{1}{x}\leq\ln x\leq x-1$.

Donc pour $x=\dfrac{5}{4}$, on obtient $1-\dfrac{1}{\frac{5}{4}}\leq\ln\dfrac{5}{4}\leq\dfrac{5}{4}-1$ soit $\dfrac{1}{5}\leq\ln\dfrac{5}{4}\leq\dfrac{1}{4}$ ou $0,2\leq\ln\dfrac{5}{4}\leq 0,25$.

L'amplitude de cet encadrement est égal à $0,25-0,2=0,05$.

V. (6 points)

1°) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (règle sur les quotients de fonctions dérivables)

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f\,'(x) = \frac{x\mathrm{e}^x}{(x+1)^2}.$$

f est croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$; f est strictement décroissante sur les intervalles $]-\infty\,;-1[$ et $]-1\,;0]$.

2°) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ (pas de problème)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to(-1)^-} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-1} \\ \lim\limits_{x\to(-1)^-} (x+1) = 0^- \end{array}\right\} \text{donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to(-1)^+} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-1} \\ \lim\limits_{x\to(-1)^+} (x+1) = 0^+ \end{array}\right\} \text{donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = +\infty$$

En $+\infty$, on rencontre une forme indéterminée du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».

$$\forall x \in \{-1\,;0\} \quad f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x}}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty \text{ (limite de référence)} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1 \end{array}\right\} \text{donc par limite d'un produit } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

3°) On cherche l'équation réduite de la tangente T_a à $\mathcal{C}$ en un point d'abscisse $a \neq -1$.

L'équation réduite de T_a s'écrit : $y = \dfrac{a\mathrm{e}^a}{(a+1)^2}(x-a) + \dfrac{\mathrm{e}^a}{a+1}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{O} \in T_a &\Leftrightarrow 0 = \frac{a\mathrm{e}^a}{(a+1)^2}(0-a) + \frac{\mathrm{e}^a}{a+1} \\ &\Leftrightarrow 0 = \mathrm{e}^a\left[-\frac{a^2}{(a+1)^2} + \frac{1}{a+1}\right] \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^a = 0 \text{ (impossible) ou } -\frac{a^2}{(a+1)^2} + \frac{1}{a+1} = 0 \\ &\Leftrightarrow a^2 - a - 1 = 0 \end{aligned}$$

On considère le polynôme $x^2 - x - 1$
etc

$x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

Conclusion :

La tangente passe par O aux points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.