TS2 — Contrôle N°1 (2 heures) du samedi 29 septembre 2007

Consignes à respecter

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Il est demandé de soigner particulièrement l'orthographe, la présentation et la rédaction ; on n'oubliera pas en particulier d'encadrer en rouge à la règle tous les résultats demandés.

L'en-tête de la copie doit être correctement libellé : nom, prénom, classe, date, intitulé exact sans abréviations ainsi qu'un cartouche de présentation avec le numéro des exercices.
A la fin de l'épreuve, il est demandé de ne pas joindre l'énoncé dans la copie mais de le garder.

I. (5 points) On demande de remplir un tableau sur la copie en indiquant si la phrase correspondante est vraie (V) ou fausse (F). Aucune justification n'est demandée.
Une réponse juste rapporte 0,5 point ; une réponse fausse enlève 0,5 point.
L'absence de réponse n'enlève aucun point et n'en apporte également aucun.

1°) Les fonctions $f : x \mapsto \ln\left(x^2\right)$ et $g : x \mapsto 2\ln\left| x \right|$ sont égales.

2°) On a : $\mathrm{e}^{\ln 5} + \mathrm{e}^{-\ln 3} = 2$.

3°) Pour tout réel $x \geq 0$, on a : $\ln\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) = -\ln\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)$.

4°) Dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on passe de la courbe représentative de la fonction logarithme népérien à la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = \ln(2x)$ par une translation.

5°) La fonction $f : x \mapsto \ln(2x+3)$ a pour dérivée la fonction $f' : x \mapsto \dfrac{1}{2x+3}$.

6°) Dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$, la courbe d'équation $y = (\ln x)^2$ coupe la courbe représentative de la fonction logarithme népérien en deux points.

7°) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(2-x)}{\ln x}$ est définie sur l'intervalle $]0\,;2]$.

8°) La fonction *f* définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-2x} - \dfrac{\mathrm{e}^{2x}+1}{\mathrm{e}^{2x}}$ est constante.

9°) On considère la fonction *f* définie par $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$. La courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $y = 2x+1$ pour asymptote oblique au voisinage de $-\infty$.

10°) Pour tout réel *x*, on a $\ln\left(\mathrm{e}^x + 2\right) = x + \ln 2$.

II. (3 points)
1°) **Restitution organisée de connaissances**
On suppose connue la propriété :
Pour tout couple $(x\,;y)$ de réels strictement positifs, on a : $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

En déduire que, pour tout réel *m* strictement positif, on a : $\ln\sqrt{m} = \dfrac{1}{2}\ln m$.

2°) Calculer la valeur exacte de $\mathrm{A} = 7\mathrm{e}^{\frac{\ln 3}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{\ln 3}{2}} + 3\mathrm{e}^{\frac{3\ln 3}{2}}$ et $\mathrm{B} = \ln\sqrt{\mathrm{e}} + \ln\left(\mathrm{e}^4\right) - 2\ln\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.

On donnera les résultats sur la copie sans donner aucunement le détail des calculs.

III. (3 points) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

$\ln(2x+1)+\ln(x-3)=\ln(x+5)$ (1) ; $2\ln x+\ln\frac{1}{x}=-1$ (2) ; $\left(e^x-3\right)^2-4=0$ (3)

IV. (3 points)

1°) Démontrer en considérant une fonction auxiliaire que, pour tout réel $x>0$, on a : $\ln x\leq x-1$ (1).

2°) Déduire de (1), que pour tout réel $x>0$, on a : $1-\frac{1}{x}\leq \ln x$ (2).

3°) A l'aide de (1) et (2), donner un encadrement de $\ln\frac{5}{4}$ par deux nombres décimaux.

Quelle est l'amplitude de l'encadrement obtenu ?

V. (6 points) On donne ci-dessous la représentation graphique **C** de la fonction $f : x \mapsto \frac{e^x}{x+1}$ dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Le but de cet exercice est d'étudier certaines propriétés de la courbe **C**.

1°) Calculer $f'(x)$. Faire un tableau récapitulatif donnant le signe de $f'(x)$ et les variations de *f* (toutes les flèches doivent être tracées à la règle).

2°) Etudier les limites de *f* aux bornes de son ensemble de définition (en présentant convenablement); compléter le tableau du 1°).

3°) Déterminer les abscisses des points de la courbe **C** en lesquels la tangente passe par l'origine O du repère.