TS3	**Contrôle de mathématiques** **Samedi 27 septembre 2008 (2 heures)**

La calculatrice n'est pas autorisée.

☐ **Il est demandé de soigner particulièrement l'orthographe, la présentation et la rédaction ; on n'oubliera pas en particulier d'encadrer en rouge à la règle tous les résultats demandés.**
☐ **L'en-tête de la copie doit être correctement libellé : nom, prénom, classe, date, intitulé exact sans abréviations ainsi qu'un cartouche de présentation avec le numéro des exercices.**
☐ **A la fin de l'épreuve, il est demandé de ne pas joindre l'énoncé dans la copie mais de le garder.**

I. (6 points) Remplir un tableau horizontal sur la copie en indiquant si la phrase correspondante est vraie (V) ou fausse (F). Aucune justification n'est demandée.
Une réponse juste rapporte 0,5 point ; une réponse fausse enlève 0,5 point.
L'absence de réponse n'enlève aucun point.

1	Pour tout entier relatif n, on a : $\mathrm{e}^{-n\ln 2}=\dfrac{1}{2^n}$.
2	Pour tout réel a strictement positif, on a : $\left(\ln\sqrt{a}\right)^3=\dfrac{3\ln a}{8}$.
3	La solution de l'équation $\dfrac{4}{1+\mathrm{e}^{-x}}=3$ est ln 3.
4	Pour tout réel x, on a : $\mathrm{e}^{-x}\leq\mathrm{e}^{x}$.
5	Pour tout réel x, on a : $\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{x}=\mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{2}-1\right)$.
6	L'ensemble des solutions de l'inéquation $\mathrm{e}^{\left(x^2\right)}\geq\mathrm{e}^{x}$ est l'intervalle $\left[1\,;+\infty\right[$.
7	Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f\left(x\right)=\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+1}$. Pour tout réel x, on a : $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}+1}$.
8	Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}+1}$. Pour tout réel x, on a : $f'\left(x\right)=-\dfrac{1}{\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)^2}$.
9	L'équation $2\ln x=\ln\left(2x+3\right)$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.
10	Pour tout réel a strictement positif, on a : $\ln\left(a^2+3a\right)=2\ln a+\ln\left(3a\right)$.

11	La solution de l'équation $e^{x} - 4e^{-x} = 0$ est ln 2.
12	On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$.

II. (2 points) On note $\mathcal{C}$ la représentation graphique de la fonction logarithme népérien dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Soit *a* et *b* deux réels strictement positifs fixés.
On note A et B les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives *a* et *b*.
Soit I le milieu du segment [AB]. La parallèle à l'axe des abscisses passant par I coupe la courbe $\mathcal{C}$ en un point J.
Calculer l'abscisse de J en fonction de *a* et *b*.

III. (7 points) On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax+b)e^{-x}$ où *a* et *b* sont deux réels et on note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Déterminer *a* et *b* sachant que $\mathcal{C}$ passe par les points $\mathrm{A}(-2\,;0)$ et B(0 ; 2).

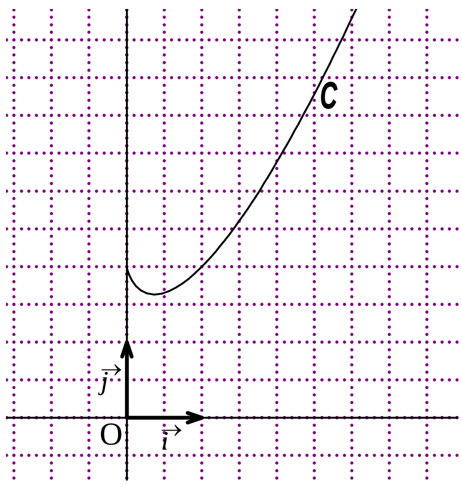
2°) Dans la suite, on prend pour *a* et *b* les valeurs obtenues au 1°). Ecrire alors l'expression de *f*.
Etudier *f* (dérivée en donnant le résultat sous forme factorisée ; limites en détaillant et conséquences graphiques éventuelles ; tableau de variation complet fait avec soin, notamment pour les flèches de variations à la règle).
3°) Déterminer l'équation réduite de la tangente *T* à $\mathcal{C}$ au point B.

4°) Soit Γ la courbe d'équation $y = e^{-x}$.

Etudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Γ. Présenter l'étude dans un tableau.

IV. (4 points) 1°) Etudier le signe de $\ln x + 1$ suivant les valeurs de x $(x > 0)$ en détaillant bien la démarche.

2°) *Dans cette question, l'élève est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.*
On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x\ln x + 2$ et on note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$. La courbe $\mathcal{C}$ est donnée ci-dessous.



Etablir que *f* admet un minimum global sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner la valeur exacte de ce minimum.

Il y a un point pour la présentation de la copie, la rédaction et l'orthographe.