TS3

Interrogation écrite du vendredi 18 septembre 2009 (50 minutes)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

Prénom et nom : …………………………………………………….. **Note : …… /20**

I. (5 points) QCM

Dans chacun des cas suivants, entourer la (ou les) bonne(s) réponse(s).

1°) $\ln\dfrac{64}{81}$ est égal à :

a. $2\ln\dfrac{8}{9}$	b. $6\ln 2+4\ln 3$	c. $6\ln 2-4\ln 3$

2°) L'expression $\ln\left(\sqrt{5}-2\right)+\ln\left(\sqrt{5}+2\right)$ est égale à :

a. $2\ln\sqrt{5}$	b. 0	c. ln 9

3°) Pour tout réel x strictement positif, l'expression $\ln x+\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ est égale à :

a. $\ln\left(x+1+\dfrac{1}{x}\right)$	b. $\ln(1+x)$	c. $\ln\left(\dfrac{1+x}{x^2}\right)$

4°) L'ensemble des solutions de l'inéquation $x\ln 0,5\leqslant \ln 4$ est l'intervalle :

a. $[-2\,;+\infty[$	b. $]-\infty\,;-2]$	c. $]-\infty\,;\ln 8]$

II. (5 points) Pour chacune des équations et inéquations suivantes, donner l'ensemble des solutions sans justifier.

$\ln x-\ln 3=-3\ln 2\quad(1)$	$S_1=$ ……………………………..
$\ln(2x-1)=\ln(4-x)\quad(2)$	$S_2=$ ……………………………..
$\ln(x+3)\leqslant 0\quad(3)$	$S_3=$ ……………………………..
$\ln(x-2)\geqslant \ln 4\quad(4)$	$S_4=$ ……………………………..
$(\ln x)^2=2-\ln x\quad(5)$	$S_5=$ ……………………………..
$2\ln x=\ln(3-2x)\quad(6)$	$S_6=$ ……………………………..

III. (4 points) Dans chaque cas, on donne l'expression d'une fonction *f* définie sur l'intervalle I précisé dans la colonne du milieu. Compléter la colonne de droite donnant l'expression de la dérivée de *f*. Faire les calculs au brouillon et tirer les traits de fraction à la règle.

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$	$\mathrm{I}=]0\,;+\infty[$	$f'(x)=$
$f(x)=\ln(3x)-\ln(x+1)$	$\mathrm{I}=]0\,;+\infty[$	$f'(x)=$
$f(x)=\ln(1-2x)$	$\mathrm{I}=\left]-\infty\,;\dfrac{1}{2}\right[$	$f'(x)=$
$f(x)=2x\ln x$	$\mathrm{I}=]0\,;+\infty[$	$f'(x)=$

IV. (2 points) On ne cherchera pas les ensembles de définition de *f* et *g*.

1°) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln x}$. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ en détaillant la démarche.

....

....

....

....

2°) On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\ln\left(x^2\right)}{x}$. Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$ en détaillant la démarche.

....

....

....

....

....

....

V. (4 points) Compléter la colonne de droite des tableaux ci-dessous en donnant l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de la fonction *f* précisée dans la colonne de gauche.

$f : x \mapsto \dfrac{1}{1-\ln x}$	$\mathcal{D}=$ ....
$f : x \mapsto \sqrt{\ln x}$	$\mathcal{D}=$ ....

$f : x \mapsto \ln\left(x^2\right)$	$\mathcal{D}=$ ....
$f : x \mapsto \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$	$\mathcal{D}=$ ....

Corrigé de l'interrogation écrite du 18-9-2009

I. 1°) a et c   2°) b   3°) b   4°) a

Solution détaillée :

4°) $x \ln 0,5 \leqslant \ln 4 \quad (1)$

$(1) \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{\ln 4}{\ln 0,5} \quad$ (car $\ln 0,5 < 0$)

$\Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{\ln 4}{\ln \frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{2\cancel{\ln 2}}{-\cancel{\ln 2}}$

$\Leftrightarrow x \geqslant -2$

$S = [-2\,;+\infty[$

II.

1°) $S_1 = \left\{ \dfrac{3}{8} \right\}$

2°) $S_2 = \left\{ \dfrac{5}{3} \right\}$

3°) $S_3 =]-3\,;-2]$

4°) $S_4 = [6\,;+\infty[$

5°) $S_5 = \left\{ \mathrm{e}\,;\dfrac{1}{\mathrm{e}^2} \right\}$

Solution détaillée :

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $(\ln x)^2 = 2 - \ln x \quad (5)$.

On pose $X = \ln x$.
L'équation (5) s'écrit : $X^2 + X - 2 = 0$

Les racines sont 1 et – 2 (par racine évidente ou par calcul du discriminant).

…

6°) $S_6 = \{ 1 \}$

III.

$f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$	$\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$
$f(x) = \ln(3x) - \ln(x+1)$	$\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$
$f(x) = \ln(1-2x)$	$\mathrm{I} = \left]-\infty\,;\dfrac{1}{2}\right[$	$f'(x) = -\dfrac{2}{1-2x} = \dfrac{2}{2x-1}$
$f(x) = 2x\ln x$	$\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$	$f'(x) = 2(1+\ln x)$

IV.

1°) $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln x}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} x = -\infty\end{array}\right\}$$ donc par limite d'un quotient $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$.

2°) $g : x \mapsto \dfrac{\ln(x^2)}{x}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty\end{array}\right\}$$ donc on rencontre une forme indéterminée du type "$\dfrac{\infty}{\infty}$".

On effectue une réécriture.

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad g(x) = \dfrac{2\ln x}{x} = 2\dfrac{\ln x}{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ (limite de référence) donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

V.

$f : x \mapsto \dfrac{1}{1-\ln x}$	$\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^* \setminus \{\,\mathrm{e}\,\}$	$f : x \mapsto \ln\left(x^2\right)$	$\mathcal{D} = \mathbb{R}^*$
$f : x \mapsto \sqrt{\ln x}$	$\mathcal{D} = [1\,;+\infty[$	$f : x \mapsto \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$	$\mathcal{D} =]-\infty\,;-1[\cup]0\,;+\infty[$

Solutions détaillées :

• $f : x \mapsto \sqrt{\ln x}$

$f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} x>0 \\ \ln x \geqslant 0 \end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases} x>0 \\ \ln x \geqslant \ln 1 \end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases} x>0 \\ x \geqslant 1 \end{cases}$

si et seulement si $x \geqslant 1$

$\mathcal{D} = [1\,;+\infty[$

• $f : x \mapsto \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

$f(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} 1+\dfrac{1}{x}>0 \\ x \neq 0 \end{cases}$

si et seulement si $\begin{cases} \dfrac{x+1}{x}>0 \\ x \neq 0 \end{cases}$

On dresse un tableau de signes pour la première condition (dès qu'on a un quotient → tableau de signes).

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
Signe de $x+1$		$-$	0^{num}	$+$		$+$	
Signe de x		$-$		$-$	$0^{\text{déno}}$	$+$	
Signe de $\dfrac{x+1}{x}$		$+$	0^{num}	$-$	$\Vert$	$+$	

$\mathcal{D} =]-\infty\,;-1[\cup]0\,;+\infty[$

Complément : Calculer $f'(x)$.

$\forall x \in]0\,;+\infty[\quad f'(x)=\dfrac{-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}}=\ldots=-\dfrac{1}{x(x+1)}$ (on applique la formule $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$)