# 4$^{e}$ série Exercices sur les études de fonctions

**Pour les courbes, on vérifiera sur calculatrice graphique.**
**On rappelle également que les tableaux de variations (tableaux récapitulatifs) doivent comporter les limites et les valeurs des extremums).**

---

$\boxed{1}$ On considère la fonction $f$ définie par $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+x+1}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Étudier $f$ (dérivée, tableau de variation, limites et conséquence graphique).
2°) Déterminer l'équation réduite de la tangente $T$ à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0.
Etudier la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à $T$.
3°) Tracer $\mathcal{C}$, l'asymptote horizontale, les tangentes horizontales et la tangente $T$.

---

$\boxed{2}$ On considère la fonction $f$ définie par $f(x)=\dfrac{3x^2-4x+4}{(x-1)^2}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Étudier $f$ (dérivée, tableau de variation, limites et conséquences graphiques).
2°) Etudier la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à son asymptote horizontale
3°) Tracer $\mathcal{C}$, ses asymptotes, la tangente horizontale et la tangente $T$ à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0.

---

$\boxed{3}$ On considère la fonction $f$ définie par $f(x)=\dfrac{x^3-x^2+3x-1}{x^2+1}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Étudier $f$ (ensemble de définition, dérivée, tableau de variation, limites).
2°) Déterminer trois réels $a$, $b$, $c$ tels que pour tout réel $x$ on ait $f(x)=ax+b+\dfrac{cx}{x^2+1}$ ; en déduire que $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique $\Delta$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
Etudier la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à $\Delta$.
3°) Déterminer les points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente est parallèle à $\Delta$.
4°) a) Démontrer que $\mathcal{C}$ admet le point $\Omega(0\ ;\ -1)$ pour centre de symétrie.
b) Déterminer l'équation réduite de la tangente $T$ à $\mathcal{C}$ en $\Omega$.
5°) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha$ dans l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.
A l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de $\alpha$ par deux décimaux d'ordre 1.
6°) Tracer $\mathcal{C}$, $\Delta$, les tangentes du 3°) et la tangente $T$.

$\boxed{4}$ On considère la fonction $f$ définie par $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^2-3x-10}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1,5 cm).

1°) Déterminer l'ensemble de définition de $f$.
2°) Étudier $f$ (tableau de variation, limites, conséquences graphiques pour $\mathcal{C}$).
3°) Etudier la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à son asymptote horizontale $\Delta$ ; on donnera en particulier les coordonnées du point A d'intersection de $\mathcal{C}$ avec $\Delta$.
4°) Déterminer les abscisses des points d'intersection B et C de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses $(x_B < x_C)$.
5°) Tracer $\mathcal{C}$ et $\Delta$ ainsi que les tangentes aux points A, B, C en expliquant (graphique complet avec pointillés et valeurs sur les axes correspondantes).
6°) Déterminer l'équation réduite de la tangente $T$ à $\mathcal{C}$ en A.
7°) a) On considère le polynôme $P(x)=x^3-2x^2-7x-4$.
Vérifier que pour tout réel $x$ on a $P(x)=(x+1)^2(x-4)$.
b) Démontrer que $T$ recoupe $\mathcal{C}$ en un point D dont on déterminera l'abscisse (on démontrera que l'équation donnant les abscisses des points commun à $\mathcal{C}$ et $T$ est équivalente à l'équation $P(x)=0$).
8°) On considère l'équation $(1-m)x^2+(1+3m)x+10m-6=0$ (E) d'inconnue $x$ où $m$ est un réel.
Démontrer que (E) est équivalente à l'équation $f(x)=m$ ; en déduire le nombre de solutions de (E) suivant les valeurs de $m$.

---

$\boxed{5}$ On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).

1°) Etudier le sens de variation de $f$.
On donnera une forme quotient factorisé pour $f'(x)$.
2°) a) Déterminer les limites de $f$ en $+\infty$, en $-\infty$ et en 1. Donner les conséquences graphiques éventuelles.
b) Démontrer que $\mathcal{C}$ admet la droite $\Delta$ d'équation $y=x+2$ pour asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$.
c) Etudier la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à $\Delta$ ; on donnera en particulier les coordonnées du point A d'intersection de $\mathcal{C}$ avec $\Delta$.
3°) Tracer $\mathcal{C}$, ses asymptotes et les tangentes horizontales.
On observera que la tangente à $\mathcal{C}$ au point O est une tangente d'inflexion c'est-à-dire que la courbe traverse cette tangente (elle est d'un côté puis de l'autre).

---

$\boxed{6}$ On considère la fonction $f$ définie par $f(x)=\dfrac{x^2-x+4}{2(x-1)}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : le centimètre).

1°) Étudier $f$ (dérivée, tableau de variation, limites, conséquences graphiques éventuelles).
2°) Démontrer que, pour tout réel $x$ différent de 1, on a : $f(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x-1}$ ; en déduire que $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique $\Delta$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
Etudier la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à $\Delta$.

3°) Faire un tableau de valeurs pour $x \in [-4\,;\,1[ \cup ]1\,;\,5]$ avec un pas de 1 (valeurs exactes).
Tracer $\mathcal{C}$ et ses asymptotes $\Delta$ et $\Delta'$ ainsi que les tangentes horizontales (graphique complet avec pointillés et valeurs sur les axes correspondantes).
4°) Déterminer un vecteur directeur $\vec{v}$ à coordonnées entières de la tangente $T$ à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0 ; tracer $T$.
5°) Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection $\Omega$ des asymptotes $\Delta$ et $\Delta'$ puis démontrer que $\mathcal{C}$ admet le point $\Omega$ pour centre de symétrie.
6°) Résoudre l'inéquation $f(x) \geq x-2$
a) graphiquement en expliquant b) par le calcul
7°) Déterminer graphiquement l'ensemble E des valeurs de $m$ pour lesquelles l'équation $f(x)=m$ admet deux solutions de signes contraire.

---

$\boxed{7}$ L'unité de longueur est le centimètre.
On considère un rectangle ABCD tel que $\text{AB}=5$ et $\text{AD}=3$. Soit $x$ un réel quelconque de l'intervalle $[0\,;\,5]$.
On note B' le point de $[\text{AB}]$ tel que $\text{BB}'=x$, D' le point de $(\text{AD})$ n'appartenant pas à $[\text{AD}]$ tel que $\text{DD}'=x$ et C' le point tel que le quadrilatère AB'C'D' soit un rectangle.
1°) Vérifier que ABCD et AB'C'D' ont le même périmètre quel que soit le réel $x$ de $[0\,;\,5]$.
2°) On note $f(x)$ l'aire en cm$^2$ de AB'C'D'.
Exprimer $f(x)$ en fonction de $x$ (sous forme développée réduite)
3°) Former le tableau de variation de $f$ sur l'intervalle $[0\,;\,5]$.
4°) Tracer la représentation graphique $\mathcal{C}$ de $f$ dans un repère orthogonal $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$ (unités : 1 cm en abscisse, 0,5 cm en ordonnée).
5°) Soit $m$ un réel fixé.
Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$ suivant les valeurs de $m$.
6°) Déterminer pour quelles valeurs de $x$ l'aire de AB'C'D' mesure 9,75 cm$^2$.
Déterminer pour quelles valeurs de $x$ l'aire de AB'C'D' mesure 10 cm$^2$. Donner les valeurs exactes.

---

$\boxed{8}$ **Partie A**

On considère la fonction $f : x \mapsto ax+b+\dfrac{c}{x}$ où $a$, $b$, $c$ sont trois réels.
Déterminer les valeurs de $a$, $b$, $c$ sachant que la représentation graphique de $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$, d'une part passe par le point $\text{A}(-1\,;\,-4)$ et d'autre part est tangente à l'axe des abscisses au point $\text{B}(1\,;\,0)$, déterminer les valeurs de $a$, $b$, $c$.

**Partie B**

On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{(x-1)^2}{x}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : le centimètre).
1°) Étudier $f$ (dérivée, tableau de variation, limites, conséquences graphiques éventuelles).
2°) Démontrer que $\mathcal{C}$ admet la droite $\Delta$ d'équation $y=x-2$ pour asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$.
Etudier la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à $\Delta$.
3°) Tracer $\mathcal{C}$ et $\Delta$.
4°) Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection $\Omega$ des asymptotes $\Delta$ et $\Delta'$ puis démontrer que $\mathcal{C}$ admet le point $\Omega$ pour centre de symétrie.
5°) Déterminer les points K et L de $\mathcal{C}$ en lesquels les tangentes sont perpendiculaires à $\Delta$ $(x_{\text{K}} < x_{\text{L}})$
6°) Soit $m$ un réel fixé.
Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$ suivant les valeurs de $m$.

---

$\boxed{9}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2-4x+5}{x-2}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$ (l'unité graphique est le centimètre).
1°) Étudier $f$ (ensemble de définition, dérivée, tableau de variation, limites et conséquences graphiques éventuelles).
2°) Déterminer trois réels $a$, $b$, $c$ tels que pour tout réel $x$ on ait $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$ ; en déduire que $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique $\Delta$ en $+\infty$ et en $-\infty$ puis étudier la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à $\Delta$.
3°) Faire un tableau de valeurs pour $x \in [0\,;\,2[ \cup ]2\,;\,4]$ avec un pas de 0,5 (valeurs exactes).
Tracer $\mathcal{C}$ et ses asymptotes $\Delta$ et $\Delta'$ ainsi que les tangentes horizontales (graphique complet avec pointillés et valeurs sur les axes correspondantes).
4°) Déterminer un vecteur directeur $\vec{v}$ à coordonnées entières de la tangente $T$ à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0 ; tracer $T$.
5°) Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection $\Omega$ des asymptotes $\Delta$ et $\Delta'$ puis démontrer que $\mathcal{C}$ admet le point $\Omega$ pour centre de symétrie.
6°) Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 2x-\dfrac{5}{2}$ (1)
a) graphiquement en expliquant b) par le calcul
7°) Déterminer graphiquement pour quelles valeurs de $m$ l'équation $f(x)=m$ (E) admet deux solutions de distinctes dans $\mathbb{R}$ de signe contraire.

---

$\boxed{10}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{ax^2+b}{x-1}$ où $a$ et $b$ sont deux réels et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$ (l'unité graphique est le cm).
1°) Déterminer $a$ et $b$ pour que $\mathcal{C}$ coupe l'axe des ordonnées au point $\text{A}(0\,;-3)$ et admette une tangente horizontale au point $\mathcal{C}$ d'abscisse $-1$.
2°) Étudier $f$ (ensemble de définition, dérivée, tableau de variation, limites et conséquences graphiques éventuelles).
3°) Déterminer trois réels $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on ait $f(x)=\alpha x+\beta+\dfrac{\gamma}{x-1}$ ; en déduire que $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique $\Delta$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
Etudier la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à $\Delta$.
4°) Faire un tableau de valeurs.
Tracer $\mathcal{C}$, l'asymptote oblique $\Delta$, l'asymptote verticale $\Delta'$, les tangentes horizontales ainsi que la tangente $T$ au point A en expliquant (pointillés et valeurs correspondantes sur les axes à ne pas oublier).

5°) Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'intersection $\Omega$ des asymptotes $\Delta$ et $\Delta'$.
Démontrer que $\mathcal{C}$ admet le point $\Omega$ pour centre de symétrie.

6°) Déterminer graphiquement <u>en expliquant</u> le nombre de solutions de l'équation $x^2 - mx + m + 3 = 0$ (E) d'inconnue $x$ où $m$ est un réel.
Retrouver le résultat par le calcul.

7°) On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{x^2+3}{|x|-1}$ et on note $\mathcal{C}''$ sa courbe représentative dans le plan.
Etudier la parité de $g$ ; en déduire le tracé de $\mathcal{C}''$ en rouge sur le même graphique qu'au 4°).

---

$\boxed{11}$ Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y = x^3$ dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Pour tout point M de $\mathcal{C}$ d'abscisse $a$, on note $T$ la tangente à $\mathcal{C}$ en M.
1°) Déterminer l'équation réduite de $T$ sous la forme $y = \alpha x + \beta$ où $\alpha$ et $\beta$ sont des réels que l'on donnera en fonction de $a$.
2°) a) Développer le polynôme $P(x) = (x-a)^2(x+2a)$.
b) En déduire que $T$ recoupe $\mathcal{C}$ en un point N dont on calculera les coordonnées en fonction de $a$.
c) Soit I le milieu de $[\mathrm{MN}]$.
Démontrer que I appartient à une courbe fixe $\Gamma$ dont on donnera une équation.

---

$\boxed{12}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+3}{x-1}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (l'unité graphique est le centimètre).
1°) Donner l'ensemble de définition de $f$.
2°) Calculer $f'(x)$.
3°) Dresser le tableau de variation de $f$.
4°) Calculer les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition et donner les conséquences graphiques éventuelles.
5°) Démontrer que $\mathcal{C}$ admet la droite $\Delta$ d'équation $y = x+1$ pour asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$.
Etudier la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à $\Delta$.
3°) Tracer $\mathcal{C}$, les asymptotes et les tangentes horizontales.

---

$\boxed{13}$ 1°) On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4$.
a) Déterminer une racine évidente de $P(x)$.
b) Déterminer un polynôme du second degré $Q(x)$ tel que, pour tout réel $x$, on ait $P(x) = (x+2)Q(x)$.
c) Etudier le signe de $P(x)$ (justifier).
2°) Etudier la fonction $f : x \mapsto x^2 + 3x - \dfrac{4}{x}$ (dérivée, tableau de variation et limites).

$\boxed{14}$ On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 + x + 1}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (l'unité graphique est le centimètre).
1°) Donner l'ensemble de définition de $f$.
2°) Calculer $f'(x)$.
3°) Dresser le tableau de variation de $f$.
4°) Calculer les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition et donner les conséquences graphiques éventuelles.
5°) Etudier la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à son asymptote horizontale $\Delta$.
6°) Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.
7°) Tracer $\mathcal{C}$, $\Delta$ et les tangentes horizontales (on respectera l'unité donnée au début de l'exercice).
Sur le même graphique, tracer la droite $D$ d'équation réduite $y = -x+1$.
8°) La fonction $f$ est-elle bornée sur $\mathbb{R}$ ?
9°) a) Factoriser le polynôme $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$. On pourra écrire $P(x) = x^3 + 2x^2 - (x+2)$.
b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \leq -x+1$.
Contrôler graphiquement.
10°) Déterminer graphiquement suivant les valeurs de $m$, <u>en expliquant,</u> le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $(m-2)x^2 + (m+1)x + m + 1 = 0$ (E) d'inconnue $x$ où $m$ est un réel.
11°) On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{2x^2 - |x| - 1}{x^2 + |x| + 1}$.
a) Déterminer l'ensemble de définition de $g$.
b) Etudier la parité de $g$.
c) Tracer la représentation graphique $\mathcal{C}''$ de $g$ en rouge sur le même graphique qu'au 7°).

---

$\boxed{15}$ 1°) Soit le polynôme $P(x) = x^3 + x^2 - 2$.
a) Déterminer une racine évidente de $P(x)$.
b) Déterminer trois réels $a$, $b$, $c$ tels que, pour tout réel $x$, on ait $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.
2°) Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3} - 2x + 1$.
a) Dresser le tableau de variations de $f$.
b) Quel est le minimum de $f$ sur $\mathbb{R}$ ?

---

$\boxed{16}$ 1°) Soit le polynôme $P(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - \dfrac{3}{4}$.
a) Déterminer trois réels $a$, $b$, $c$ tels que, pour tout réel $x$, on ait $P(x) = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)(ax^2 + bx + c)$.
b) Etudier le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de $x$.
2°) Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - \dfrac{3}{4}x + 1$.
Dresser le tableau de variations de $f$.

**17** On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x}{(x+1)^2}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (l'unité graphique est le centimètre).

1°) Etudier $f$ (dérivée, tableau de variation, limites et conséquences graphiques).
2°) Déterminer l'équation réduite de la tangente $T$ à $\mathcal{C}$ au point O ; déterminer les coordonnées du point A où $T$ recoupe $\mathcal{C}$.
3°) Faire un tableau de valeurs.
Tracer $\mathcal{C}$, l'asymptote, la tangente horizontale ainsi que la tangente $T$ (pointillés et valeurs correspondantes sur les axes). Placer le point A.
4°) A tout réel $m$, on fait correspondre la droite $D_m$ d'équation réduite $y = 2x + m$.
Déterminer graphiquement le nombre points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de $D_m$.
5°) On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{2|x|}{(x+1)^2}$ on note $\mathcal{C}$'' sa représentation graphique.
Tracer $\mathcal{C}$'' sur le même graphique qu'au 3°) (en expliquant).

---

**18** On considère la fonction $f : x \mapsto 1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (l'unité graphique est le centimètre).

1°) Étudier $f$ (ensemble de définition, dérivée, tableau de variation, limites et conséquences graphiques éventuelles).
2°) Déterminer les points d'intersection A et B de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses
3°) Déterminer le point d'intersection C de $\mathcal{C}$ avec la droite $\Delta$ d'équation réduite $y = 1$. Déterminer un vecteur directeur $\vec{v}$ à coordonnées entières de la tangente $\mathcal{D}$ à C.
4°) Faire un tableau de valeurs.
Tracer $\mathcal{C}$, $\Delta$, la tangente horizontale, les tangentes en A et B, en expliquant, et la tangente $\mathcal{D}$ (graphique complet avec pointillés et valeurs sur les axes correspondantes).
5°) a) Déterminer l'équation réduite de la tangente $T$ à $\mathcal{C}$ en un point d'abscisse $a\left(a \in \mathbb{R}_+^*\right)$.
b) Déterminer les points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente passe par O.

---

**19** **Partie A**

On considère la fonction $f : x \mapsto x - 3 + \dfrac{1}{x}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité graphique pour la figure du 3°)).

1°) Étudier $f$ (ensemble de définition, dérivée, tableau de variation, limites et conséquences graphiques éventuelles).
2°) Démontrer que $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique $\Delta$ en $+\infty$ et en $-\infty$ ; étudier la position relative de $\mathcal{C}$.
3°) Tracer $\mathcal{C}$, les asymptotes et les tangentes horizontales.
Pour la figure, prendre le repère $\mathcal{R}$ orthonormé d'unité 1 cm
4°) On considère le repère $\mathcal{R}' = \left(\Omega, \vec{I}, \vec{J}\right)$ où $\Omega$ est le point défini par $\overrightarrow{O\Omega} = -3\vec{j}$, $\vec{I} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{J} = \vec{j}$.
1°) Soit M un point quelconque du plan, $(x\ ;\ y)$ ses coordonnées cartésiennes dans le repère $\mathcal{R}$ et $(X\ ;\ Y)$ ses coordonnées cartésiennes dans le repère $\mathcal{R}$'.
En décomposant de deux manières le vecteur $\overrightarrow{OM}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$, exprimer $x$ en fonction de $X$ et $y$ en fonction de $X$ et $Y$.
2°) Déterminer alors une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ dans le repère $R'$ sous la forme $Y = g(X)$.
On pourra rédiger ainsi : « $M \in \mathcal{C}$ si et seulement si ……
si et seulement si …… ».
En déduire la nature de $\mathcal{C}$.

**Partie B**

Pour tout réel $m$, on note $D_m$ la droite d'équation réduite $y = m$.
1°) Démontrer que l'équation donnant les abscisse des points communs à $\mathcal{C}$ et à $D_m$ est équivalente à $x^2 - (m+3)x + 1 = 0$.
2°) Déterminer pour quelles valeurs de $m$ la droite $D_m$ coupe la courbe $\mathcal{C}$ en deux points M et N éventuellement confondus.
3°) On note I le milieu de [MN].
a) Calculer $x_I$ en fonction de $m$. Il est inutile de calculer $x_M$ et $x_N$ en fonction de $m$ ; on utilisera la somme des racines d'une équation du second degré.
b) Donner $y_I$ en fonction de $m$.
c) Déterminer une relation liant $x_I$ et $y_I$. En déduire que I appartient à une droite fixe $L$ dont on déterminera une équation.

---

**20** On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x+4}{x^2+1}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (l'unité graphique est le centimètre).

1°) Étudier $f$ (ensemble de définition, dérivée, tableau de variation, limites et conséquences graphiques).
2°) Tracer $\mathcal{C}$ et la tangente horizontale (graphique complet avec pointillés et valeurs sur les axes correspondantes). Préciser les points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec les axes de coordonnées.
3°) On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{|3x+4|}{x^2+1}$ et on note $\mathcal{C}$' sa courbe représentative.
Exprimer $g(x)$ en fonction de $f(x)$ suivant les valeurs de $x$ ; en déduire le tracé de $\mathcal{C}$' à partir de $\mathcal{C}$.

---

**21** On veut entourer par un grillage un enclos rectangulaire d'aire 1 250 m$^2$. Ce terrain donne sur une rivière et il n'y a pas de grillage le long de la rive rectiligne. On note $x$ la longueur des deux côtés perpendiculaires à la rive et $y$ celle du côté parallèle à la rive ; ces deux dimensions sont exprimées en mètres, $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y \in \mathbb{R}_+^*$. Attention, seuls les côtés sont entourés de grillage.

1°) Exprimer la longueur $f(x)$ la longueur du grillage en mètres en fonction de $x$ (sans réduire au même dénominateur).
2°) Etudier $f$ et en déduire les dimensions du terrain pour lesquelles la longueur du grillage est minimale.
3°) Déterminer pour quelles valeurs de $x$ la longueur de grillage est inférieure ou égale à 145 m.

**Donnée :** $25^2 = 625$.

---

**22** Une casserole est un cylindre avec fond sans couvercle. On note $R$ le rayon de la base et $h$ la hauteur.

On cherche pour une surface $S$ de métal donnée $(S>0)$, le volume maximal.
1°) Exprimer $h$ en fonction de $S$ et $R$.
2°) Calculer le volume $V(R)$ en fonction de $R$ et $S$.
3°) Etudier $V$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ; la valeur du maximum n'est pas demandée. Conclure
Que peut-on dire de $h$ et $R$ dans ce cas ?

---

**23** On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+\alpha x+\beta}{1-x}$ où $\alpha$ et $\beta$ sont deux réels et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ (l'unité graphique est le centimètre).
1°) Déterminer $\alpha$ et $\beta$ tels que $\mathcal{C}$ passe par les points $\mathrm{A}(2\,;5)$ et $\mathrm{B}(4\,;1)$ ; dans la suite, $\alpha$ et $\beta$ ont les valeurs ainsi déterminées.
2°) Étudier $f$ (ensemble de définition, dérivée, tableau de variation, limites et conséquences graphiques éventuelles).
3°) Déterminer trois réels $a$, $b$, $c$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, on ait $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$ ; en déduire que $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique $\Delta$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
Etudier la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à $\Delta$.
4°) a) Faire un tableau de valeurs.
Tracer $\mathcal{C}$, les asymptotes et les tangentes horizontales (pointillés et valeurs correspondantes sur les axes à ne pas oublier).
b) Soit C le point où $\mathcal{C}$ rencontre l'axe des ordonnées.
Tracer les tangentes $T_1$, $T_2$, $T_3$ respectivement aux points A, B, C.
5°) Démontrer que $\mathcal{C}$ admet le point $\mathrm{I}(1\,,\,3)$ pour centre de symétrie.
6°) Déterminer graphiquement pour quelles valeurs de $m$ l'équation $x^2-mx+m+3=0$ (E) d'inconnue $x$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ de signes contraires.

---

**24** On considère la fonction $f$ définie par $f(x)=\dfrac{-x+2}{x-1}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : le centimètre).
1°) Étudier $f$ (dérivée, limites, conséquences graphiques éventuelles, tableau de variation) puis tracer $\mathcal{C}$ et ses asymptotes.
2°) On note A et B les points d'intersection de $\mathcal{C}$ respectivement avec l'axe des abscisses et avec l'axe des ordonnées. Démontrer que les tangentes à $\mathcal{C}$ en A et B sont parallèles.

---

**25** Soit $h$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0$.
On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+3+h(x)$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

Démontrer que $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique $\Delta$.

**26** On considère la fonction $f : x \mapsto ax+b+\dfrac{c}{x}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

On sait que $\mathcal{C}$ passe par le point $\mathrm{A}(2\,;1)$ et est tangente à l'axe des abscisses au point B d'abscisse 1.
1°) Traduire ces informations sous forme de trois égalités à l'aide de $f$ et $f'$.
b) Déterminer $a$, $b$, $c$.
°) Étudier $f$ pour les valeurs ainsi trouvées (tableau de variation et limites).
3°) Déterminer les asymptotes à $\mathcal{C}$.
4°) Tracer $\mathcal{C}$ et ses asymptotes ainsi que la tangente $D$ en A à $\mathcal{C}$.

---

**27** En étudiant le sens de variation d'une fonction bien choisie, comparer les deux nombres
$\mathrm{A}=0{,}999998+\dfrac{1}{0{,}999998}$ et $\mathrm{B}=0{,}999999+\dfrac{1}{0{,}999999}$.

---

**28** On considère la fonction $f : x \mapsto \sin x$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
On note $T$ la tangente à $\mathcal{C}$ en O.
1°) Déterminer l'équation de $T$.
2°) On se propose d'étudier la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à $T$.
Pour cela, on considère la fonction $g$ définie par $g(x)=\sin x - x$.
a) Calculer $g'(x)$ ; étudier son signe en déduire le sens de variation de $g$.
b) Calculer $g(0)$ ; en déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de $x$ puis la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à $T$.

---

**29** Soit $f$ une fonction strictement décroissante définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ et $f(5)=0$.
Soit $g$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que la courbe représentative de $g$ dans le plan muni d'un repère admet la droite d'équation réduite $y=-3$ pour asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$.
On suppose de plus que $g(5)=1$.
1°) On considère la fonction $u$ définie par $u(x)=f(x)\times g(x)$.
Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x)$.
2°) On considère la fonction $v$ définie par $v(x)=f(x)+g(x)$.
Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} v(x)$.
3°) On considère la fonction $w$ définie par $w(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$.
Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} w(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} w(x)$.
Etudier la limite de $w$ en 5.

On suppose que $f$ et $g$ sont continues en 5 c'est-à-dire que $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = f(5)$ et que $\lim\limits_{x\to 5} g(x) = g(5)$.

---

**30** On considère une fonction $f$ définie et dérivable sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ admettant le tableau de variation ci-dessous.

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $2$ | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $f$ | 1 ↗ | 4 ↘ | $-\infty$ ‖ $-\infty$ ↗ | 3 ↘ | $-\infty$ |

1°) La fonction $f$ est paire.
2°) On a $f'(0) \leq 0$.
3°) La fonction $f$ est majorée sur $\mathcal{D}$.

---

**31** Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
V ou F ?
Si pour tout réel $h$, on a $f(2+h) = -f(2-h)$, alors $\mathcal{C}$ admet le point $\mathrm{A}(2\ ;\ 0)$ pour centre de symétrie.

---

**32** Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ ' les courbes représentatives respectives des fonctions $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : le centimètre).
Tracer les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ '.
**Conjecture** : d'après le graphique, il semble qu'il y ait une tangente commune à $\mathcal{C}$ et à $\mathcal{C}$ '.
L'objectif de cet exercice est de démontrer cette conjecture et de déterminer cette tangente.

1°) Soit $a$ un réel quelconque et A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $a$.
Déterminer une équation de la tangente $T$ à $\mathcal{C}$ au point A.
2°) Soit $b$ un réel quelconque non nul et B le point de $\mathcal{C}$ ' d'abscisse $b$.
Déterminer une équation de la tangente $T$' à $\mathcal{C}$ ' au point B.
3°) Etablir un système vérifié par $a$ et $b$ tel que $T$ et $T$' soit confondues.
Résoudre ce système ; en déduire la réponse au problème posé.

**33** On considère les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{2} - x + 1$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$.

Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ ' les courbes représentatives respectives des fonctions $f$ et $g$ dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 centimètres).

1°) Etudier $f$ et $g$.
2°) Tracer $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ '.
3°) Calculer $u(x) = g(x) - f(x)$ sous forme d'un quotient ; en déduire les points d'intersection A et B de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$' et les positions relatives $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ '.
3°) Démontrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$ ' ont la même tangente en A.

**34** Le but de cet exercice est de démontrer que, pour tout réel $x$ strictement positif, on a $2\sqrt{x} + \dfrac{1}{x} \geq 3$.

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$.
1°) Démontrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, pour tout réel $x$ strictement positif, on a :
$f'(x) = \dfrac{\sqrt{x^3} - 1}{x^2}$.
Etudier le signe de $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. En déduire le sens de variation de $f$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2°) Etablir que $f$ admet un extremum global sur $\mathbb{R}_+^*$ et préciser la nature de cet extremum.
3°) Conclure.

---

**35** Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit $\Delta$ la droite d'équation réduite $y = x - 3$.
V ou F ?
Si $\Delta$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

---

**36** Soit $f$ et $g$ les fonctions définies par $f(x) = \left(2 + \dfrac{1}{x}\right)(x+3)$ et $g(x) = \dfrac{3x^2 + 5x + 1}{x}$.
Démontrer, en transformant les expressions de $f(x)$ et $g(x)$, que les courbes représentatives de $f$ et $g$ dans le plan muni d'un repère admettent chacune une asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$.

---

**37** Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(1+x)^3 - 1}{2x}$.

---

**38** On considère la fonction $f : x \mapsto x + 1 + \dfrac{4}{x-1}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
Déterminer les asymptotes à $\mathcal{C}$.

**39** 1°) On considère la fonction $f : x \mapsto x - 4 + \dfrac{1}{x-3}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

a) Démontrer que **C** admet une asymptote oblique $\Delta$ ; étudier la position relative de **C** par rapport à $\Delta$.
b) La courbe **C** admet-elle une autre asymptote ?

2°) Déterminer l'expression d'une fonction *g* dont la courbe représentative dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ admet la droite $\Delta'$ d'équation réduite $y = 2x + 1$ pour asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$, **C** ' étant toujours au-dessous de $\Delta'$ pour $x \neq -1$, et la droite *D'* d'équation réduite $x = -1$ pour asymptote verticale et telle $g(0) = -2$.

**40** On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$.

1°) Étudier *f* (ensemble de définition, dérivée, tableau de variation, limites).
2°) Les phrases suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
a) *f* est bornée sur $\mathbb{R}$.
b) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \left|f(x)\right| \leq 1$.

**41** Soit *f* une fonction définie sur $\mathbb{R}$ ; on note **C** sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Dire si les phrases suivantes sont vraies ou fausses
1°) **C** admet le point $I(1;0)$ comme centre de symétrie si, et seulement si, pour tout réel *x*, on a : $f(2-x) = -f(x)$.
2°) **C** admet le point $J(0;2)$ comme centre de symétrie si, et seulement si, pour tout réel *x*, on a : $f(-x) = 4 - f(x)$.
3°) **C** admet le point $K(1;2)$ comme centre de symétrie si, et seulement si, pour tout réel *x*, on a : $f(1-x) = 4 - f(1+x)$.
4°) Si $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, alors **C** admet le point $I(1;0)$ comme centre de symétrie.
5°) Si $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, alors **C** admet le point $K(1;2)$ comme centre de symétrie.

**42** On considère la fonction *f* définie par $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$.
1°) Etudier les variations de *f* sur $\mathbb{R}$ ; former le tableau de variation de *f* sur $\mathbb{R}$.
2°) Recopier et compléter la phrase
« D'après le tableau de variations, la fonction *f* admet un minimum global sur l'intervalle $[-2;+\infty[$ égal à … ; il est obtenu pour $x = ...$ ».
Retrouver ce résultat algébriquement.

**43** **Partie A**

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{5x^2+4x}{x^2-1}$ et on note **C** sa courbe représentative dans le plan *P* muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité graphique : le centimètre).
1°) Déterminer l'ensemble de définition de *f*.
2°) Étudier *f* (tableau de variation, limites, conséquences graphiques pour **C**).
3°) Etudier la position relative de **C** par rapport à son asymptote horizontale $\Delta$ ; on donnera en particulier les coordonnées du point A d'intersection de **C** avec $\Delta$.
4°) Déterminer les abscisses des points d'intersection de **C** avec l'axe des abscisses.
5°) Tracer **C** et $\Delta$ ainsi que les tangentes horizontales (graphique complet avec pointillés et valeurs sur les axes correspondantes).
6°) A l'aide du graphique, déterminer graphiquement suivant les valeurs de *m*, <u>en expliquant,</u> le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $(m-2)x^2 + (m+1)x + m + 1 = 0$ (E) d'inconnue *x* où *m* est un réel.
Discuter suivant les valeurs de *m*.

**Partie B**

On considère la fonction $g_a : x \mapsto \dfrac{5x^2+ax}{x^2-1}$ et on note $\Gamma_a$ sa courbe représentative dans le plan *P*.
1°) Démontrer que toutes les courbes $\Gamma_a$ passent par un point fixe I.
2°) Calculer $g_a'(x)$.
3°) Déterminer les valeurs de *a* pour lesquelles $g_a$ n'admet ni maximum relatif, ni minimum relatif.
4°) Déterminer les valeurs de *a* pour lesquelles $g_a$ est strictement décroissante sur chaque intervalle de son ensemble de définition.

**44** On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x + 2$ et on note **C** sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité graphique : le centimètre).
1°) Faire le tableau de variation *f*.
2°) a) Vérifier que, pour tout réel *x*, on a : $f(x) = (x-1)^2(x+2)$.
b) En déduire les abscisses des points A et B où **C** coupe l'axe des abscisses $(x_A < x_B)$.
3°) a) Déterminer l'équation réduite de la tangente $\Delta$ à **C** au point A.
b) La droite $\Delta$ recoupe **C** en un point C.
Déterminer l'abscisse de C (utiliser le 2°) a)).
c) Démontrer qu'il existe un autre point D de **C** en lequel la tangente est parallèle à $\Delta$.
4°) Tracer **C** et $\Delta$.
5°) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ (1) (*m* réel donné) suivant les valeurs de *m* (sous forme de tableau).
6°) Soit E le point de **C** d'abscisse $-1$. La tangente $\Delta'$ en E à **C** recoupe **C** en un point F.
Déterminer l'abscisse de F ; contrôler graphiquement.
7°) a) Déterminer l'équation réduite de la tangente $T_a$ à **C** au point d'abscisse *a* $(a \in \mathbb{R})$ sous la forme $y = \alpha x + \beta$.
b) Déterminer les points de **C** en lesquels la tangente passe par le point $G(1;-1)$.

**45** On considère la fonction *f* définie par $f(x) = \dfrac{4x+3}{x^2+1}$ et on note **C** sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
1°) Étudier *f* (dérivée, tableau de variation, limites et conséquences graphiques).
2°) Déterminer l'équation réduite de la tangente *T* à **C** au point A d'abscisse 0.
3°) Calculer les images par *f* de $-7$ ; $-3$ ; $-2$ ; $-1$ ; $-0{,}5$ ; 0 ; 0,5 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5,5 ; 7.
Tracer **C**, les tangentes horizontales et la tangente *T*. Placer le point B où **C** coupe l'axe des abscisses.
*On prendra le centimètre pour unité graphique.*

**46** Soit ABCDEFGH un cube d'arête 10.

Pour tout $x \in [0\,;10]$, on construit :

• le point M de [AB] tel que $AM = x$.

• le point N de [AE] tel que $EN = x$.

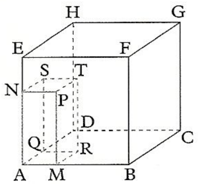
• le point Q de [AD] tel que $AQ = x$.

• le parallélépipède AMRQNPTS.

On note $V(x)$ son volume.

1°) Exprimer $V(x)$ en fonction de x.

2°) Déterminer pour quelle valeur de *x* le volume de AMRQNPTS est maximale.




---

**47** **(30 minutes)**

1°) Soit *f* une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On sait que $\mathcal{C}$ passe par les points A(1 ; 2) et B(2 ; 3) et que la tangente en A à $\mathcal{C}$ passe par le point C(0 ; –1).

Déterminer les valeurs de $f(1)$, $f(2)$ et $f'(2)$.

2°) On sait que $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Déterminer *a*, *b*, *c*.

**48** On considère les fonctions $f : x \mapsto x^2 + 3x$ et $g : x \mapsto -x^2 - x + 2$.

On note $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ leurs représentation graphiques respectives dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Démontrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont la même tangente au point d'abscisse –1.

**49** On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{2x+1}$.

On note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer en quels points la tangente à $\mathcal{C}$ est parallèle à la droite $\Delta$ d'équation $4x–9y+1=0$.

**50** On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x-3}{2(x+1)}$. Calculer $f'(x)$.

**51** On considère la fonction $f :\ x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$. On note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de *f*.

2°) Faire le tableau de variations de *f*.

3°) Déterminer deux réels *a* et *b* tels que, pour tout réel $x \in \mathcal{D}$, on ait : $f(x) = a + \dfrac{b}{x-1}$.

En déduire que $\mathcal{C}$ se déduit de la représentation graphique *H* d'une fonction de référence par une transformation que l'on précisera.

4°) Tracer $\mathcal{C}$ et *H* ainsi que la tangente *T* en O à $\mathcal{C}$.

5°) Déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite $\Delta$ d'équation $y = 4x$.

**52** L'unité de longueur est le centimètre.

Soit ABSCD un carré de côté 4. On note E le milieu de [AD].

Soit M un point quelconque de [AB] distinct de B.

La perpendiculaire à la droite (EM) en M coupe le segment [BC] en N.

On pose $AM = x \quad (0 \le x < 4)$ et l'on note $f(x)$ l'aire (en cm2) du triangle EMN.

1°) Que peut-on dire des triangles AME et BNM ?

En déduire BN en fonction de *x*.

2°) Exprimer en fonction de *x* les aires des triangles AME et BMN ainsi que l'aire du trapèze EDCN en fonction de *x* ; en déduire que $f(x) = -\dfrac{x^3}{4} + x^2 - x + 4$.

3°) En déduire pour quelle valeur de *x* l'aire du triangle EMN est maximale.

**53** On coupe une ficelle de 1 mètre en deux morceaux de longueur *x* et 1–*x* (en mètres). Avec le premier morceau on entoure un carré ; avec le second morceau on entoure un domino c'est-à-dire un rectangle dont la longueur est égale au double de la largeur.

1°) Exprimer les dimensions du domino en fonction de *x* (simplifier les expressions).

2°) On note la somme des deux aires en $m^2$.

Etudier *f* et en déduire pour quelle valeur de *x* la somme des aires est minimale.

**54** 1°) Etudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{(x-1)^2}{x}$ (dérivée, limites, tableau de variations).

2°) On note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Démontrer que $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique $\Delta$ dont on donnera une équation.

Etudier la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à $\Delta$.

3°) Tracer $\mathcal{C}$, $\Delta$ et les tangentes horizontales.

4°) Déterminer l'intersection de $\mathcal{C}$ et de la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = 1 - x^2$.

**55** 1°) Soit $u$, $v$, $w$ trois fonctions dérivables sur un intervalle I. Démontrer que le produit $uvw$ est dérivable sur I et démontrer que : $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$ (observer que le « prime » se déplace à chaque fois).
**Indication :** écrire $uvw = (uv)w$ et utiliser le résultat sur la dérivée d'un produit de deux fonctions dérivables. Bien procéder étape par étape.
2°) Calculer la dérivée de $f : x \mapsto x^2(3x-1)(x+4)$.

**56** Former le tableau de variations de la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 3}{x-1}$.
Calculer les extremums (<u>valeurs exactes</u>).

**57** Former le tableau de variations de la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{x-1}$.
Calculer les extremums (<u>valeurs exactes</u>).

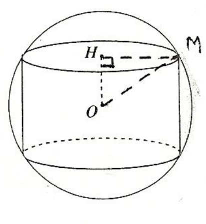
**58** On considère les fonctions $f : x \mapsto x^2 + 2x$ et $g : x \mapsto \dfrac{2x}{x+1}$.
Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ les courbes représentatives respectives des fonctions $f$ et $g$ dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 centimètre).

1°) Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.
2°) Démontrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont la même tangente en l'un de ces deux points.
3°) Tracer $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.
4°) Tracer sur le même graphique la représentation graphique de la fonction $h : x \mapsto x^2 + 2|x|$.

**59** Dans une sphère de rayon $R$ donné, on inscrit un cylindre (figure ci-contre).
On pose $x = \mathrm{OH}$ $(0 \leq x \leq R)$.

1°) Calculer HM² en fonction de R et de $x$.
En déduire que le volume du cylindre de R et de $x$.
En déduire que le volume du cylindre est égal à $V(x) = 2\pi(R^2 x - x^3)$.
2°) Calculer $V'(x)$ ; faire le tableau de variation sur l'intervalle [0 ; R].
En déduire pour quelle valeur de $x$ le volume du cylindre est maximal.

**Rappel :** le volume d'un cylindre de révolution de rayon $r$ et de hauteur $h$ est donné par $\pi \times r^2 \times h$.




**60** 1°) On note $x$ l'une des dimensions en cm d'un rectangle dont le périmètre mesure 28 cm.
Exprimer l'autre dimension $y$ en fonction de $x$.
Expliquer pourquoi $x \in [0 ; 14]$ puis l'aire $\mathcal{A}$ du rectangle (en cm²) en fonction de $x$.
2°) Déterminer l'aire maximale d'un rectangle de périmètre 28 cm. Préciser ses dimensions et sa nature.

**61** On considère la fonction $f : x \mapsto ax + b + \dfrac{c}{x}$ où $a$, $b$, $c$ sont trois réels et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.
On sait que $\mathcal{C}$ passe par le point $\mathrm{A}(2 ; 1)$ et est tangente à l'axe des abscisses au point B d'abscisse 1.
1°) a) Traduire ce information sous forme de 3 égalités uniquement à l'aide de $f$ et $f'$ sans calcul et sans utiliser $a$, $b$, $c$. On pourra s'aider d'un schéma.
b) Déterminer $a$, $b$, $c$.
2°) Etudier $f$ pour les valeurs ainsi trouvées (tableau de variations et limites).
3°) Déterminer les asymptotes à $\mathcal{C}$.
4°) Tracer $\mathcal{C}$ et ses asymptotes ainsi que la tangente $D$ en A à $\mathcal{C}$.

---

# Solutions

**1** 1°) $f'(x) = \dfrac{3(x-1)(x+1)}{(x^2+x+1)^2}$  2°) $T : y = -3x + 1$ ; $f(x) - (-3x+1) = \dfrac{3x^2(x+1)}{x^2+x+1}$

**2** 1°) $f'(x) = \dfrac{-2(x+2)}{(x-1)^3}$  2°) $f(x) - 3 = \dfrac{2x+1}{(x-1)^2}$

**3** 1°) $f'(x) = \dfrac{x^4+3}{(x^2+1)^2}$ ; $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2°) $f(x) = x - 1 + \dfrac{2x}{x^2+1}$ ; $\mathcal{C}$ admet la droite $\Delta$ d'équation $y = x - 1$ pour asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$.
3°) $\mathcal{C}$ admet une tangente parallèle à $\Delta$ aux points d'abscisses respectives $-1$ et 1.
4°) a) On vérifie que pour tout réel $h$, on a : $f(0+h) + f(0-h) = -2$.
5°) $0{,}3 < \alpha < 0{,}4$

**4** 1°) $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{ -2 ; 5 \}$
2°) $f'(x) = -\dfrac{4(x^2+2x+7)}{(x^2-3x-10)^2}$ ; $f$ est décroissante sur chacun des intervalles de son ensemble de définition.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ ; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ .

3°) $\mathrm{A}(-1 ; 1)$
5°) $T : y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3}$ ; $f'(-1) = -\dfrac{2}{3}$ ; $f'(-3) = -\dfrac{5}{8}$ ; $f'(2) = \dfrac{5}{27}$

$\boxed{5}$ 1°) $f'(x)=\dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$ ; $f(3)=\dfrac{27}{4}$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1} x^3=1\\ \\ \lim\limits_{x\to1}(x-1)^2=0^+\end{array}\right\}$ donc par limite d'un quotient $\lim\limits_{x\to1} f(x)=+\infty$

**C** admet la droite Δ' d'équation $x=1$ pour asymptote verticale.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$.

**Tableau de variation :** ne pas oublier la double barre pour le signe de $f'(x)$ et les variations de *f*.
On ne met par contre pas de 0 sur les doubles barres.

*f* est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;1[$ ; *f* est strictement décroissante sur l'intervalle $]1\,;3]$ ;
*f* est strictement croissante sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

2°) c) $f(x)-(x+2)=\dfrac{3x-2}{(x-2)^2}$.

**C** est au-dessus de Δ pour $x\in\left]\dfrac{2}{3};1\right[\cup]1;+\infty[$ ; **C** est au-dessous de Δ pour $x\in\left]-\infty;\dfrac{2}{3}\right[$ ;

**C** et Δ sont sécantes au point $A\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{8}{3}\right)$.
**C** admet une tangente horizontale aux points d'abscisses 0 et 3 (car la dérivée s'annule en 0 et en 3).

$\boxed{6}$ 1°) $f'(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{2(x-1)^2}$

2°) Démontrer que, pour tout réel *x* différent de 1, on a $f(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x-1}$ ; en déduire que **C** admet une asymptote oblique Δ en $+\infty$ et en $-\infty$.
Etudier la position relative de **C** par rapport à Δ.
3°) Faire un tableau de valeurs pour $x\in[-4\,;1[\cup]1\,;5]$ avec un pas de 1 (valeurs exactes).

$\boxed{8}$ **Partie A** $a=1$ ; $b=-2$ ; $c=1$

$\boxed{9}$ 1°) $f'(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$ .

On étudie le signe du polynôme $x^2-4x+3$. Ce polynôme admet deux racines : 1 (racine évidente) et 3.
*f* est croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;1]$ et *f* est décroissante sur $[1\,;2[$ ; *f* est décroissante sur l'intervalle $]2\,;3]$ ; *f* est croissante sur l'intervalle $[3\,;+\infty[$.

$f(1)=-2$

$f(3)=2$.

3°)
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ .
$\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=+\infty$ ; $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=-\infty$. D'après ces deux dernières limites, **C** admet la droite d'équation $x=2$ pour asymptote verticale.

4°) $a=1$, $b=-2$, $c=1$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x-2)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-2}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x-2)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x-2}=0$

On en déduit que **C** admet la droite Δ d'équation réduite $y=x-2$ pour asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$.

5°) L'équation réduite de *T* s'écrit $y=4x+6$.
On trace les asymptotes (verticale et oblique) et les tangentes horizontales.
$\Omega(2\,;0)$

Pour tout $h\neq0$, on a : $f(2+h)=\dfrac{h^2+1}{h}$ ; $f(2-h)=\dfrac{(-h)^2+1}{-h}=\dfrac{h^2+1}{-h}=-\dfrac{h^2+1}{h}$

$f(2+h)+f(2-h)=0$

6°) b) Résolution par le calcul

L'inéquation (1) est équivalente à $\dfrac{-2x^2+5x}{2(x-2)}\geq0$ ou encore à $\dfrac{x(-2x+5)}{2(x-2)}\geq0$.

On fait un tableau de signes.
$S=]-\infty\,;0]\cup\left]2;\dfrac{5}{2}\right]$.

7°) Les solutions de l'équation (E) sont les abscisses des points de **C** dont l'ordonnée est égale à *m*.
On trace sur le graphique une droite d'équation $y=m$ pour une valeur de *m* quelconque.

On trouve $m<-\dfrac{5}{2}$.

$\boxed{10}$ 1°) $a=1$ ; $b=3$ 2°) $f'(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$ 3°) $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=4$.

$\boxed{12}$ 1°) *f* est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ 2°) $f'(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}$

$\boxed{14}$ 2°) $f'(x)=\dfrac{3x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}$ ; $f(0)=-1$ ; $f(-2)=3$ 3°) 5°) $f(x)-2=\dfrac{-3x-3}{x^2+x+1}$

6°) $A\left(-\dfrac{1}{2}\,;0\right)$ et $B(1\,;0)$.

9°) a) $P(x)=(x+2)(x^2-1)=(x+2)(x-1)(x+1)$ b) L'inéquation est équivalente à $-\dfrac{P(x)}{x^2+x+1}\geq0$

On trouve $x\in]-\infty\,;-2]\cup[-1\,;1]$.

**15** 1°) a) 1 est une racine évidente de $P(x)$ b) $a=1$ ; $b=c=2$

2°) Le minimum global de *f* sur $\mathbb{R}$ est égal à $-\dfrac{5}{12}$ ; il est obtenu pour $x=1$.

**17** 1°) $f'(x)=\dfrac{2(1-x^2)}{(x+1)^2}$ ; *f* est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -1[$ ; *f* est croissante sur l'intervalle $]-1\ ;\ 1]$ ; *f* est décroissante sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.

$f(1)=\dfrac{1}{2}$

2°) L'équation réduite de *T* s'écrit $y=2x$ ; $\mathrm{A}(-2\ ;\ -4)$

**18** 5°) Les points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente passe par O sont les points d'abscisses $-1-\sqrt{7}$ et $-1+\sqrt{7}$

**19** **Partie A** 3°) $\begin{cases} x = X-3 \\ y = X+Y \end{cases}$ **Partie B** 2°) $m \in ]-\infty\,;-5[\cup]-1\,;+\infty[$ $\mathrm{I}\left(\dfrac{m+3}{2};m\right)$ ; $x_{\mathrm{I}}=\dfrac{y_{\mathrm{I}}+3}{2}$ donc $y_{\mathrm{I}}=2x_{\mathrm{I}}-3$

**20** 1°) F 2°) V 3°) V

**32** On trouve $a=-2$ et $b=-\dfrac{1}{2}$.

**41** 1°), 2°), 3°), 4°) sont vraies ; 5°) est fausse.

**42** 2°) $m=-2$ ; $x=0$

**43** **Partie A** 2°) $f'(x)=-2\dfrac{2x^2+5x+2}{(x^2-1)^2}$

*f* est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -2]$ ; *f* est croissante sur $[-2\ ;\ -1[$ ; *f* est croissante sur l'intervalle $\left]-1\ ;\ -\dfrac{1}{2}\right]$ ; *f* est décroissante sur l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2}\ ;\ 1\right[$ ; *f* est décroissante sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.

**Partie B**

3°) $g_a{}'(x)=\dfrac{ax^2+10x+a}{(x^2-1)^2}$

**47** 1°) 2°) $a=-2$, $b=7$, $c=-3$.

**53** 2°) $x=\dfrac{8}{17}$.

**59** $\dfrac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$

**60** 2°) 49 cm²