Chap.9 Les fonctions polynômes du second degré (1)

Forme développée ← **Polynôme du second degré** → **Forme canonique**

Polynôme du second degré ↓ **Forme factorisée**

Polynôme du second degré
$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$
Forme développée réduite
↓
Forme canonique $a(x-\alpha)^2 + \beta$
↓
Racines
Une forme factorisée en facteurs du premier degré
↓
Signe

Il est important de disposer de plusieurs formes d'une expression qui ont chacune leur intérêt suivant le problème qu'on a à traiter.

I. Généralités

1°) Définition

On appelle **fonction polynôme du second degré** une fonction *f* vérifiant les deux conditions :
C_1 : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
C_2 : il existe trois réels a, b, c avec $a \neq 0$ tels que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = ax^2 + bx + c$.

2°) Vocabulaire

- L'expression $ax^2 + bx + c$ est appelée **polynôme ou trinôme du second degré en *x***.
- Les réels a, b, c sont appelés **coefficients du polynôme** (c : **coefficient constant**).
- x est la **variable** du polynôme.

3°) Exemples

- $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$

Coefficients : $a = 3$; $b = -5$; $c = 1$

- $f(x) = 4x^2 - 9x$

Coefficients : $a = 4$; $b = -9$; $\boxed{c = 0}$

- $f(x) = 4x^2 - 1$

Coefficients : $a = 4$; $\boxed{b = 0}$; $c = -1$.

polynômes incomplets

- $f(x) = (x+3)(x-1)$

$f(x) = x^2 + 2x - 3$

Coefficients : $a = 1$; $b = 2$; $c = -3$

4°) N.B.

Dans la définition, on doit avoir $a \neq 0$ mais b ou c peuvent être égaux à 0.
Dans ce cas, on dira que le **polynôme est incomplet**.

5°) Contre-exemples

- $f(x) = 3x^2 + 5x + \dfrac{1}{x} \qquad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$

(c n'est pas constant)

- $f(x) = x^2 + 4|x| + 7 \qquad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

(pas de valeur absolue)

A partir du moment où il y a des inverses, des valeurs absolues ou des racines, la fonction n'est pas polynôme.

II. Forme canonique d'une fonction polynôme du second degré

1°) Démonstration (R.O.C)

$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c} \; (a \neq 0)$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a\underbrace{\left(x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a}\right)}_{\text{on travaille sur ce polynôme}}$ **1ère étape : mettre *a* en facteur**

$$\frac{\frac{b}{a}}{2} = \frac{b}{2a} \qquad \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$$

$$f(x)=a\left[\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right]$$

$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\underbrace{-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}}\right]$$

2^e^ étape : faire apparaître le carré d'une somme

$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4a\times c}{4a\times a}\right]$$

3^e^ étape : réduire

$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{4ac}{4a^2}\right)\right]$$

$$f(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$$

2°) Définition du discriminant

On appelle **discriminant** du polynôme ax^2+bx+c $(a\neq 0)$ le nombre $\Delta=b^2-4ac$.

3°) Règle (forme canonique)

$f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$.

$\forall x\in\mathbb{R}$ $\quad f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$

Forme canonique : écriture dans laquelle la variable n'apparaît qu'une fois.

III. Racine d'un polynôme du second degré

1°) Définition

Les solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ sont appelées
- les **racines** de l'équation
- les **racines** du polynôme ax^2+bx+c

2°) Vocabulaire

Racine → Polynôme
Racine → Equation

Solution → Equation (uniquement)

3°) Exemples

Ex. 1

$\boxed{f(x)=x^2+3x-4}$

$f(1)=1^2+3\times 1-4$

$f(1)=0$

Donc 1 est une racine (« évidente ») du polynôme $f(x)$.
(-4 aussi)

Ex. 2

$\boxed{f(x)=x^2-9}$

Cherchons les racines de ce polynôme.

On résout l'équation $x^2-9=0$

$x=3$ ou $x=-3$

Les racines de ce polynôme sont 3 et -3.

Ex. 3

$\boxed{f(x)=x^2-4x}$

Cherchons les racines de ce polynôme.

On résout l'équation $x^2-4x=0$

$x(x-4)=0$

$x=0$ ou $x-4=0$

$x=0$ ou $x=4$

Les racines de ce polynôme sont 0 et 4.

IV. Equations du second degré

1°) Méthode de résolution (admise sans démonstration)

$f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$

On cherche les racines de $f(x)$ dans $\mathbb{R}$.

On doit résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$.

L'équation $f(x)=0$ est équivalente à $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]=0$

$$\boxed{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0}$$

1^{er} cas : $\boxed{\Delta > 0}$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2=0$$

$\downarrow$ Identité remarquable

$$\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$$

$$\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$$

$x+\dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}=0$ ou $x+\dfrac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}=0$

$x=-\dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x=-\dfrac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

2 solutions réelles

2^e cas : $\boxed{\Delta = 0}$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$$

$$x=-\frac{b}{2a}$$

1 solution réelle

3^e cas : $\boxed{\Delta < 0}$

$$\underbrace{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}_{\text{quantité }\geq 0}=\underbrace{\frac{\Delta}{4a^2}}_{\text{quantité }<0}$$

impossible

pas de solution réelle

2°) Règle

$ax^2+bx+c\neq 0 \quad (a\neq 0)$

$\boxed{\Delta=b^2-4ac}$

1^{er} cas : $\boxed{\Delta>0}$ L'équation admet 2 racines distinctes dans $\mathbb{R}$: $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

2^e cas : $\boxed{\Delta=0}$ L'équation admet 1 racine double dans $\mathbb{R}$: $x_0=-\dfrac{b}{2a}$.

3^e cas : $\boxed{\Delta<0}$ L'équation n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$.

3 formulations équivalentes dans le 3^e cas :

Si $\boxed{\Delta<0}$,
- l'équation $f(x)=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$
- le polynôme $f(x)$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$
- pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)$ est non nul.

2°) Exemples

● Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $3x^2-5x+1=0$.

Considérons le polynôme $3x^2-5x+1$.

Recensement des coefficients :
$a=3$; $b=-5$; $c=1$

Calcul du discriminant

$$\begin{aligned}\Delta&=b^2-4ac\\&=(-5)^2-4\times3\times1\\&=13\end{aligned}$$

On a : $\Delta>0$ donc le polynôme admet 2 racines distinctes dans $\mathbb{R}$:

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\qquad$ $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\dfrac{5-\sqrt{13}}{6}$ $\qquad$ $x_2=\dfrac{5+\sqrt{13}}{6}$

$$\boxed{S=\left\{\frac{5-\sqrt{13}}{6}\,;\,\frac{5+\sqrt{13}}{6}\right\}}$$

• Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2-3x+4=0$.

Considérons le polynôme x^2-3x+4.

Recensement des coefficients :
$a=1$; $b=-3$; $c=4$

Calcul du discriminant
$\Delta=9-16$
$\quad=-7$

On a : $\Delta<0$ donc le polynôme n'admet aucune racine dans $\mathbb{R}$.

$\boxed{S=\varnothing}$

• Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $5x^2-10x+5=0$.

Considérons le polynôme $5x^2-10x+5$.

Recensement des coefficients :
$a=5$; $b=-10$; $c=5$

Calcul du discriminant
$\Delta=100-100$
$\quad=0$

On a : $\Delta=0$ donc le polynôme admet une racine double dans $\mathbb{R}$.

$x_0=-\dfrac{b}{2a}$

$x_0=-\dfrac{-10}{10}$

$x_0=1$

$\boxed{S=\{1\}}$

3°) Remarques (importante)

• Le signe de Δ permet de donner le nombre de racines réelles (d'où le nom de « discriminant »).

• $ax^2+bx+c \quad (a\neq 0)$; $\Delta=b^2-4ac$.
Lorsque a et c sont de signe contraire, $ac<0$, $-4ac>0$ d'où $\Delta>0$.
• On n'utilise pas les formules avec Δ quand on sait résoudre une équation du second degré directement, en particulier dans le cas d'équations incomplètes.

Exemples :

$x^2-2x+1=0$ $(x-1)^2=0$ $x-1=0$ $x=1$ $S=\{1\}$	$x^2-1=0$ $(x-1)(x+1)=0$ $x-1=0$ ou $x=-1$ $S=\{-1\,;1\}$	$x^2-6x=0$ $x(x-6)=0$ $x=0$ ou $x=6$ $S=\{0\,;6\}$

Les formules avec Δ donneraient bien sûr les mêmes résultats mais il serait maladroit de les utiliser.

• Quand on obtient $\Delta=0$, c'est qu'on est passé à côté d'une identité remarquable.

V. <u>Discriminant réduit</u>

1°) Définition

$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$

On suppose que b est pair.

On pose $\boxed{b=2b'}$.
L'équation s'écrit alors $ax^2+2bx+c=0 \quad (a\neq 0)$.

$\Delta=b^2-4ac$
$\Delta=(2b')^2-4ac$
$\Delta=4(b')^2-4ac$

$\Delta=4(b'^2-4ac)$

On pose $\boxed{\Delta'=(b')^2-ac}$ **(discriminant réduit)**.

On a $\Delta=4\Delta'$.

2°) Différents cas possibles

<u>1er cas :</u> $\boxed{\Delta' > 0}$ équivalent à $\boxed{\Delta > 0}$

L'équation admet 2 racines distinctes dans $\mathbb{R}$:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b'-\sqrt{4\Delta'}}{2a} = \frac{-2b'-2\sqrt{\Delta'}}{2a} = \frac{2\left(-b'-\sqrt{\Delta'}\right)}{2a} = \frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b'+\sqrt{4\Delta'}}{2a} = \frac{-2b'+2\sqrt{\Delta'}}{2a} = \frac{2\left(-b'+\sqrt{\Delta'}\right)}{2a} = \frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$$

<u>2e cas :</u> $\boxed{\Delta' = 0}$ équivalent à $\boxed{\Delta = 0}$

L'équation admet 1 racine double dans $\mathbb{R}$:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2b'}{2a} = -\frac{b'}{a}$$

<u>3e cas :</u> $\boxed{\Delta' < 0}$ équivalent à $\boxed{\Delta < 0}$

L'équation n'admet aucune racine dans $\mathbb{R}$.

2°) Règle

> $ax^2+bx+c \neq 0 \quad (a \neq 0)$
>
> $b' = \frac{b}{2}$
>
> $\boxed{\Delta' = b'^2 - ac}$
>
> **1er cas :** $\boxed{\Delta' > 0}$ L'équation admet 2 racines distinctes dans $\mathbb{R}$: $x_1 = \frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$ et $x_2 = \frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$.
>
> **2e cas :** $\boxed{\Delta' = 0}$ L'équation admet 1 racine double dans $\mathbb{R}$: $x_0 = -\frac{b'}{a}$.
>
> **3e cas :** $\boxed{\Delta' < 0}$ L'équation n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$.

3°) Utilisations

- $x^2+7x-6=0$

$$\left.\begin{array}{l} a=1 \\ b=7 \\ c=-6 \end{array}\right\} \text{j'utilise } \Delta \ \ (b \text{ impair})$$

- $x^2+6x-7=0$

$$\left.\begin{array}{l} a=1 \\ b=6 \\ c=-7 \end{array}\right\} b'=3 \ ; \ \text{j'utilise } \Delta'$$

- $x^2+2\sqrt{3}x+4=0$.

$$\left.\begin{array}{l} a=1 \\ b=2\sqrt{3} \\ c=4 \end{array}\right\} b'=\sqrt{3} \ ; \ \text{j'utilise } \Delta'$$

(N.B. : si on utilise Δ, on obtient les mêmes solutions après simplification par 2 qu'avec Δ' !)

<u>Quand utilise-t-on le discriminant réduit ?</u>

On calcule $\frac{b}{2}$.
Si on trouve un trouve un nombre simple (il ne faut pas que ce soit une fraction par exemple), on utilise le discriminant réduit.
(Mais si on utilise le discriminant normal, on trouve heureusement les mêmes solutions.)

Sinon on utilise le discriminant normal.

VI. <u>Somme et produit des racines</u>

1°) Règle

> $f(x) = ax^2+bx+c \quad (a \neq 0)$.
>
> $\Delta \geq 0$
>
> Le polynôme $f(x)$ admet deux racines, x_1 et x_2 distinctes ou confondues dans $\mathbb{R}$.
>
> On a : $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

2°) Démonstration (ROC)

On pose : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

On a :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-2b}{2a} \\ &= \frac{-b}{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2} \\ &= \frac{b^2-\Delta}{4a^2} \\ &= \frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2} \\ &= \frac{4ac}{4a^2} \\ &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

3°) Application aux racines évidentes

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2+3x-4=0$ sans calculer Δ.

On remarquable 1 est une racine de l'équation.
L'équation admet donc une autre racine α dans $\mathbb{R}$ (distincte ou confondue).

On a : $1 \times \alpha = \frac{-4}{1}$

$\alpha = -4$

$\boxed{S = \{1\,;-4\}}$

Remarque : on pourrait aussi utiliser la formule sur la somme (mais on ne le fait pas en pratique).

VII. <u>Factorisation d'un polynôme du second degré</u>

1°) Etude des différents cas possibles

$f(x) = ax^2+bx+c \quad (a \neq 0)$
$\Delta = b^2-4ac$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ **(Forme canonique)**

<u>1er cas :</u> $\boxed{\Delta > 0}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

$\downarrow$ identité remarquable

$f(x) = a\left(x+\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$ (repasser en rouge la variable x qui apparaît cette fois à deux endroits)

On a posé : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

donc $-x_1 = \frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $-x_2 = \frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

d'où $\boxed{f(x) = \underline{\underline{a}}(x-x_1)(x-x_2)}$

(<u>Une</u> forme factorisée de $f(x)$ en facteurs du premier degré).

<u>2e cas :</u> $\boxed{\Delta = 0}$

$\boxed{f(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}$

<u>3e cas :</u> $\boxed{\Delta < 0}$

Le polynôme ne peut s'écrire comme produit de facteurs du premier degré.

2°) Règle

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

$\boxed{\Delta > 0}$

2 racines distinctes dans $\mathbb{R}$, x_1 et x_2.

$$f(x) = \underline{\underline{a}}(x - x_1)(x - x_2)$$

$\boxed{\Delta = 0}$

une racine double dans $\mathbb{R}$, $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$

$$f(x) = \underline{\underline{a}}(x - x_0)^2$$

$\boxed{\Delta < 0}$

aucune racine dans $\mathbb{R}$

Pas de factorisation en facteurs du premier degré.

3°) Exemple

$$\boxed{f(x) = 3x^2 + 2x - 5}$$

Donner une factorisation de $f(x)$ en facteurs du premiers degré.

Recensement des coefficients :

$a = 3$; $b = 2$; $c = -5$

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times (-5)$$
$$= 64$$

On a : $\Delta > 0$ donc l'équation admet 2 racines distinctes dans $\mathbb{R}$, x_1 et x_2.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{64}}{2 \times 3} \qquad x_2 = \frac{-2 + \sqrt{64}}{2 \times 3}$$

$$x_1 = -\frac{5}{3} \qquad x_2 = 1$$

$$f(x) = 3(x - x_1)(x - x_2)$$

$\boxed{f(x) = 3(x - 1)\left(x + \dfrac{5}{3}\right)}$ (une forme factorisée en facteurs du premier degré)

$\boxed{f(x) = (x - 1)(3x + 5)}$ (une autre forme factorisée en facteurs du premier degré)

VIII. <u>Signe d'un polynôme du second degré</u>

1°) Différents cas possibles

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

On veut étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Méthode

- On va utiliser une forme factorisée en facteurs du premier degré lorsque $\Delta \geq 0$
- On va utiliser la forme canonique lorsque $\Delta < 0$

<u>1^er^ cas :</u> $\boxed{\Delta > 0}$

Le polynôme admet deux racines distinctes x_1 et x_2 dans $\mathbb{R}$.
(On suppose que $x_1 < x_2$).

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \underline{\underline{a}}(x - x_1)(x - x_2)$$

$a = 0$
impossible

$x - x_1 = 0$
$x = x_1$

$x - x_2 = 0$
$x = x_2$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
SGN de a		SGN de a		SGN de a		SGN de a	
SGN de $1x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
SGN de $1x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
SGN de $f(x)$		SGN de a	0	SGN contraire de a	0	$+$	

<u>2^e^ cas :</u> $\boxed{\Delta = 0}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

$a = 0$
impossible

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

$$x + \frac{b}{2a} = 0$$

$$x = -\frac{b}{2a}$$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
SGN de a		SGN de a		SGN de a	
SGN de $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$		$+$	0	$+$	
SGN de $f(x)$		SGN de a	0	SGN de a	

<u>3^e cas :</u> $\boxed{\Delta<0}$

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=a\underbrace{\left[\underbrace{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}_{\text{positif ou nul}}-\underbrace{\frac{\Delta}{4a^2}}_{\text{positif strict}}\right]}_{\text{positif strict}}$$

x	$-\infty$	$+\infty$
SGN de $f(x)$	SGN de a	

2°) Règle du signe du trinôme

$\boxed{f(x)=ax^2+bx+c}$ $(a\neq 0)$

$\boxed{\Delta>0}$

2 racines distinctes dans $\mathbb{R}$, $x_1<x_2$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
SGN de $f(x)$		SGN de a	0	SGN contraire de a	0	SGN de a	

On dit que le polynôme est toujours du signe de a sauf pour x entre les racines.

$\boxed{\Delta=0}$

une racine double dans $\mathbb{R}$, x_0

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
SGN de $f(x)$		SGN de a	0	SGN de a	

$\boxed{\Delta<0}$

aucune racine dans $\mathbb{R}$

*

*

x	$-\infty$	$+\infty$
SGN de $f(x)$	SGN de a	

3°) Exemples

• Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\boxed{x^2+4x-5\geq 0}$.

Considérons le polynôme x^2+4x-5.

Recensement des coefficients :
$a=1$; $b=4$; $c=-5$

Calcul du discriminant
$$\Delta=b^2-4ac$$
$$=4^2-4\times1\times(-5)$$
$$=36.$$

On a : $\Delta>0$ donc l'équation admet 2 racines distinctes dans $\mathbb{R}$, x_1 et x_2.

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\qquad$ $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\dfrac{-4-\sqrt{36}}{2\times1}$ $\qquad$ $x_2=\dfrac{-4+\sqrt{36}}{2\times1}$

$x_1=-5$ $\qquad$ $x_2=1$

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
SGN de x^2+4x-5		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\boxed{S=]-\infty\,;-5]\cup[1\,;+\infty[}$

• Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\boxed{-2x^2+x-1>0}$.

Considérons le polynôme $-2x^2+x-1$.

Recensement des coefficients :
$a=-2$; $b=1$; $c=-1$

Calcul du discriminant
$$\Delta=b^2-4ac$$
$$=1^2-4\times(-2)\times(-1)$$
$$=-7.$$

On a : $\Delta<0$ donc le polynôme est du signe de a c'est-à-dire strictement négatif.

$\boxed{S=\varnothing}$

4°) Cas particuliers (pour gagner du temps)

• N.B. : résolution d'inéquations du second degré incomplètes
Ne pas utiliser de discriminant.

• SGN de x^2-9

3 et –3 sont racines évidentes.
Donc $\Delta>0$

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
SGN de $1\ x^2-9$		$+$	0	$-$	0	$+$	

+

• SGN de $\dfrac{x+5}{x-1}$ $(x \neq 1)$

SGN de $\dfrac{x+5}{x-1}$ = SGN de $\left[(x+5)(x-1)\right]$ $(x \neq 1)$

$(x+5)(x-1) = x^2 + 4x - 5$
$(x+5)(x-1)$ est un polynôme du second degré.
–5 et 1 sont racines évidentes.
Donc $\Delta > 0$

x	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
SGN de $\dfrac{x+5}{x-1}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

IX. <u>Equations et inéquations bicarrées</u>

1°) Exemple 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\underbrace{x^4 + 4x^2 - 5}_{\text{Polynôme bicarré (4}^{\text{e}}\text{ degré mais incomplet en } x \text{ et en } x^3\text{)}} = 0$

On pose $X = x^2$ (changement d'inconnue).
L'équation s'écrit : $X^2 + 4X - 5 = 0$ (c'est l'équation « résolvante »).

Considérons le polynôme $X^2 + 4X - 5$ (du second degré en *X*).

1 est racine évidente donc le polynôme admet une autre racine α dans $\mathbb{R}$ (distincte ou confondue).

$\alpha \times 1 = \dfrac{-5}{1}$
$\alpha = -5$

Les racines du polynôme sont $X_1 = 1$ et $X_2 = -5$.
Or $X = x^2$.

Donc $x^2 = 1$ ou $\underbrace{x^2 = -5}_{\text{impossible dans } \mathbb{R}}$
soit $x = 1$ ou $x = -1$.

$S = \{1\,;\,-1\}$

2°) Exemple 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^4 + 10x^2 - 9 \leq 0$

On pose $X = x^2$.

L'inéquation s'écrit : $X^2 - 10X + 9 \leq 0$.

Considérons le polynôme $X^2 - 10X + 9$.

1 est racine évidente donc le polynôme admet une autre racine α dans $\mathbb{R}$ (distincte ou confondue).

$\alpha \times 1 = \dfrac{9}{1}$
$\alpha = 9$

Les racines du polynôme sont $X_1 = 1$ et $X_2 = 9$.

1$^{\text{ère}}$ façon :

X	$-\infty$		1		9		$+\infty$
SGN de $X^2 - 10X + 9$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $X \in [1\,;\,9]$.

Or $X = x^2$.

Donc $1 \leq x^2 \leq 9$.

$$\begin{cases} 1 \leq x^2 \\ x^2 \leq 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 - 9 \leq 0 \end{cases}$$

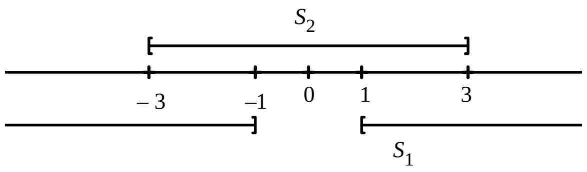
$x^2 - 1$ est un polynôme du second degré dont les racines sont 1 et – 1.
$x^2 - 9$ est un polynôme du second degré dont les racines sont 3 et – 3.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
SGN de $x^2 - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
SGN de $x^2 - 9$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S_1 = \left]-\infty\,;\,-1\right] \cup \left[1\,;\,+\infty\right[$
$S_2 = [-3\,;\,3]$

$\boxed{S = S_1 \cap S_2}$



$\boxed{S = [-3\,;-1] \cup [1\,;3]}$

2^e^ façon :

L'inéquation s'écrit $1(X-1)(X-9) \leq 0$.

Or $X = x^2$.

Donc $1(x^2-1)(x^2-9) \leq 0$

x	$-\infty$		-3		-1		1		3		$+\infty$
SGN de x^2-1		+		+	0	−	0	+		+	
SGN de x^2-9		+	0	−		−		−	0	+	
SGN de $(x^2-1)(x^2-9)$		+	0	−	0	+	0	−	0	+	

$\boxed{S = [-3\,;-1] \cup [1\,;3]}$

X. <u>Complément sur somme et produit des racines</u>

1°) Introduction

Ecrire une équation du second degré dont les racines sont – 1 et 2.

$(x+1)(x-2) = 0$

$x^2 - x - 2 = 0$

2°) Etude de la condition nécessaire

a et *b* sont deux réels.

a et *b* sont solutions de l'équation $(x-a)(x-b) = 0$

$$x^2 - ax - bx + ab = 0$$

$$x^2 - \underbrace{(a+b)}_{S}x + \underbrace{ab}_{P} = 0$$

Conclusion :

a et *b* sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$ d'inconnue *x* avec $S = a+b$ et $P = ab$.

3°) Etude de la condition suffisante

Si deux nombres sont solution de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$,
alors leur somme est égale à $-\dfrac{-S}{1} = S$ et leur produit est égal à $\dfrac{P}{1} = P$.

4°) Application

Déterminer deux nombres dont la somme est égale à 7 et dont le produit est égal à l2.

1^ère^ méthode : système

2^e^ méthode : application de ce qui précède

$x^2 - 7x + 12 = 0$ (équation résolvante).

Considérons le polynôme $x^2 - 7x + 12$.

$a = 1$; $b = -7$; $c = 12$

Calcul du discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= 49 - 48$$
$$= 1$$

On a : $\Delta > 0$ donc le polynôme admet 2 racines distinctes dans $\mathbb{R}$:

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $\qquad$ $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = 4$ $\qquad$ $x_2 = 3$

Les nombres cherchés sont 3 et 4.