$1^{\text{ère}}$ **S3**

Contrôle du vendredi 4 juin 2010 (1 heure 30)

● Compléter la feuille de réponses jointe avec le sujet en écrivant très lisiblement et sans rature, sans rien écrire en dehors de ce qui est demandé. Les parties rédigées ne doivent pas comporter d'abréviations.

● Ne rien écrire sur l'énoncé.

● Pour les questions où l'on ne demande pas de justification, donner une seule réponse.

Dans les exercices I à III, l'espace est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ que l'on suppose orthonormé dans les exercices **II** et **III**. Aucune figure n'est demandée.

I. (2 points) On considère les points $\mathrm{A}(2\,;0\,;4)$, $\mathrm{B}(5\,;4\,;1)$, $\mathrm{C}(1\,;1\,;-1)$ et $\mathrm{D}(-2\,;-3\,;2)$.

Démontrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

II. (5 points)

On se contentera de donner les résultats sans justifier. Donner une seule réponse à chaque fois.

1°) Déterminer une équation du plan P passant par le point A(3 ; 2 ; 4) et parallèle au plan (xOy).

2°) Déterminer une équation de la sphère S de centre I(0 ; 0 ; 2) et passant par O.

3°) Soit B le symétrique de A par rapport au point I.
Déterminer les coordonnées de B.

4°) Déterminer l'intersection de S et de P.

5°) Préciser l'intersection du plan (xOy) et du plan (OAI).

III. (2 points) Soit $\mathcal{C}$ le cylindre de révolution d'axe (Oz) et de rayon $\sqrt{6}$.

1°) Déterminer une équation du cylindre $\mathcal{C}$.

2°) Parmi les points suivants, lequel (lesquels) appartient (appartiennent) à $\mathcal{C}$? Donner la réponse sans justifier.

$\mathrm{E}\left(\sqrt{2}-1\,;\sqrt{2}+1\,;4\right)$; $\mathrm{F}(-2\,;1\,;0)$; $\mathrm{G}\left(2\,;-\sqrt{2}\,;0\right)$

IV. (1 point) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}\cos 2x - \cos x$.

Démontrer que, pour tout réel x, on a : $f\,'(x) = \sin x\,(1 - 2\cos x)$.

Question bonus à traiter sur une feuille à part) :
Dresser le tableau récapitulatif donnant le signe de la dérivée (donné de manière assez détaillée) et les variations de la fonction f sur l'intervalle $\mathrm{I} = [0\,;2\pi]$.

V. (3 points) Les trois machines A, B, C d'un atelier produisent respectivement 2 000 pièces, 3 000 pièces et 5 000 pièces. Par ailleurs, on constate que le nombre de pièces avec défaut est de 100 pour la machine A, 120 pour la machine B et 150 pour la C. Les autres pièces n'ont pas défaut.

1°) Compléter le tableau.

	A	**B**	**C**	**Total**
Sans défaut				
Avec défaut				
Total				**10 000**

2°) On choisit au hasard une pièce de la production totale.

Donner sans justifier la probabilité des événements suivants :
E : « La pièce provient de la machine A » ;
F : « La pièce a un défaut ».

On donnera la valeur exacte des résultats sous forme décimale.

VI. (3 points) On lance la boule, au hasard, sur la roulette représentée ci-contre. Elle s'arrête sur l'une des cases numérotées.

1°) Quelle est la probabilité d'obtenir le numéro 6 ? d'obtenir un numéro pair ?
Donner les résultats sans justifier sous forme fractionnaire.

2°) En réalisant 120 fois cette expérience, est-on certain d'obtenir 40 fois le numéro 6 ?
Répondre par « oui » ou « non » sans justifier.

VII. (2 points) Une urne contient 20 boules. Certaines sont blanches, d'autres sont noires. On note N le nombre de boules blanches ($N < 20$).
On tire une boule au hasard dans cette urne et on note sa couleur.
Soit A l'événement : « La boule tirée est blanche ».

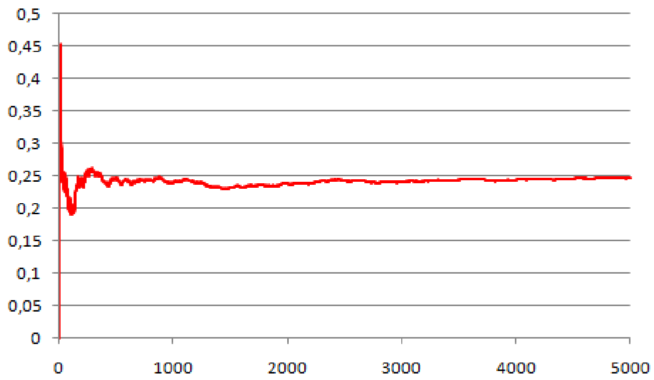
1°) Quelle est la probabilité de A ? On donnera le résultat en fonction de N.

2°) On répète l'expérience 5000 fois : le graphique au verso représente l'évolution de la fréquence de A au cours de ces 5000 expériences.

La fréquence de A semble se stabiliser : vers quel nombre ?

Quelle semble être la probabilité de A ?

Combien y a-t-il de boules blanches ?



VIII. (2 points) Trois personnes, Aline, Bernard et Claude, ont chacune un sac contenant des billes. Chacune tire au hasard une bille de son sac.

1°) Le contenu des sacs est donné ci-dessous.

Sac d'Aline :	Sac de Bernard :	Sac de Claude :
25 billes rouges et 72 billes noires	10 billes rouges et 30 billes noires	40 billes rouges et 119 billes noires

Laquelle de ces personnes a la probabilité la plus grande de tirer une bille rouge ? Justifier à l'aide de calculs.

2°) On souhaite qu'Aline ait la même probabilité que Bernard de tirer une bille rouge.
Avant le tirage, combien de billes noires faut-il ajouter pour cela dans le sac d'Aline ?

3°) **Question bonus (à traiter sur une feuille à part) :**
Le résultat de la première question reste-t-il valable si l'on ajoute à chaque personne un même nombre de billes rouges ?
Le résultat de la première question reste-t-il valable si l'on ajoute à chaque personne un même nombre de billes noires ?
Le résultat de la première question reste-t-il valable si l'on ajoute à chaque personne un même nombre de billes rouges et de billes noires ?

1$^{\text{ère}}$ S3

Feuille de réponses du contrôle du vendredi 4 juin 2010

Prénom : ……………………………….. **Nom :** ……………………………………..

Note : ……… /20

I. …… / 2

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

II. …… / 5

1°) P : ……………..

2°) S : …………………………………………………..

3°) B(…….. ; …….. ; ……..)

4°) $S \cap P$ = ……………..

5°) $(xOy) \cap (\text{OAI})$ = ……………..

III. …… / 2

1°) $\mathcal{C}$: ………………………………………

2°) Entourer le (les) point(s) qui appartient (appartiennent) à $\mathcal{C}$.

$\text{E}\left(\sqrt{2}-1\,;\sqrt{2}+1\,;4\right)$; $\text{F}(-2\,;1\,;0)$; $\text{G}\left(2\,;-\sqrt{2}\,;0\right)$

IV. …… / 1

………

………

………

………

………

………

………

………

………

V. …… / 3

1°) Tableau :

	A	B	C	Total
Sans défaut				
Avec défaut				
Total				**10 000**

2°) $P(\mathrm{E}) =$ ……………….. $P(\mathrm{F}) =$ ………………..

VI. …… / 3

1°)

La probabilité d'obtenir le numéro 6 est égale à ………………..

La probabilité d'obtenir un numéro pair est égale à ………………..

2°) …………..

VII. …… / 2

1°) $P(\mathrm{A}) =$ ………………..

2°)

La fréquence de A semble se stabiliser vers le nombre ……………..

La probabilité de A semble être égale à …………………….

Il y a ………………. boules blanches.

VIII. …… / 2

1°)

La personne qui a la probabilité la plus grande de tirer une bille rouge est ………………..

Justification à l'aide de calculs.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

2°)

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

3°) **Question bonus**

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Corrigé du contrôle du 4-6-2010

I. A(2 ; 0 ; 4), B(5 ; 4 ; 1), C(1 ; 1 ; –1), D(– 2 ; – 3 ; 2)

$\overrightarrow{AB}\left|\begin{array}{l} x_B - x_A = 3 \\ y_B - y_A = 4 \\ z_B - z_A = -3 \end{array}\right.$ $\quad\quad$ $\overrightarrow{DC}\left|\begin{array}{l} x_C - x_D = 3 \\ y_C - y_D = 4 \\ z_C - z_D = -3 \end{array}\right.$

Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont deux à deux égales.
Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Par suite, on en déduit que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

Remarque :

On évite de parler de vecteurs colinéaires.

Pour démontrer que l'on a un parallélogramme, il suffit de démontrer que deux vecteurs sont égaux.

II.

1°) P : $z = 4$

2°)
On a $OI = 2$ (quasiment évident).

S : $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$ ou $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$

3°) B(– 3 ; – 2 ; 0)

4°) $S \cap P$ = {F(0 ; 0 ; 4)}

5°) (xOy) ∩ (OAI) = (OB)

Détail :

1°) On applique la formule pour un plan parallèle à l'un des plans de coordonnées.
2°) On commence par calculer la distance OI.

$OI = \sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2} = 2$ (on peut aussi donner le résultat directement car I(0 ; 0 ; 2) donc I ∈ (Oz)).
Le rayon de la sphère S est égal à 2.

Une équation de S s'écrit : $(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-2)^2 = 2^2$ soit $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$.
On pouvait aussi développer cette équation mais ce n'était ni demandé ni forcément utile.

3°) I est le milieu de [AB] donc $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \\ z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} 0 = \dfrac{3 + x_B}{2} \\ 0 = \dfrac{2 + y_B}{2} \\ 2 = \dfrac{4 + z_B}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} x_B = -3 \\ y_B = -2 \\ z_B = 0 \end{cases}$

B(– 3 ; – 2 ; 0)

4°) Le plan P a pour équation $z = 4$; le point I a pour coordonnées (0 ; 0 ; 2).

La distance de I au plan P est égale à 2.

Or la sphère S a pour rayon 2.
Donc le plan P est tangent à la sphère S.

On en déduit que le point d'intersection de S et de P est le point (0 ; 0 ; 4) (c'est le point de contact ou point de tangence de la sphère S et du plan P).

Autre méthode :

Pour déterminer l'intersection de P et de S, on résout le système :

$\begin{cases} z = 4 \\ x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4 \end{cases}$

Ce système est successivement équivalent aux systèmes suivants.

$\begin{cases} z = 4 \\ x^2 + y^2 + 4 = 4 \end{cases}$

$\begin{cases} z = 4 \\ x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} z = 4 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

5°) Le point O est commun aux plans (xOy) et (OAI).

Le point B appartient au plan (xOy) car sa cote est nulle.
De plus, B est le symétrique de A par rapport à I donc B $\in$ (AI).
Or (AI) $\subset$ (OAI). D'où B $\in$ (OAI).

La droite d'intersection des plans (OAI) et (xOy) est la droite (OB).

III.

1°) Une équation de $\mathcal{C}$ s'écrit : $x^2 + y^2 = 6$.

2°) Les points qui appartiennent à $\mathcal{C}$ sont E et G.

Justification :

$$x_{\text{E}}{}^2 + y_{\text{E}}{}^2 = \left(\sqrt{2}-1\right)^2 + \left(\sqrt{2}+1\right)^2 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 + 2 + 2\sqrt{2} + 1 = 6 \text{ donc E} \in \mathcal{C}$$
$$x_{\text{F}}{}^2 + y_{\text{F}}{}^2 = (-2)^2 + 1^2 = 5 \text{ donc F} \notin \mathcal{C}$$
$$x_{\text{G}}{}^2 + y_{\text{G}}{}^2 = 2^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 = 6 \text{ donc G} \in \mathcal{C}$$

IV.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{1}{2} \times (-2\sin 2x) + \sin x$ (rappel : $\left(\cos(ax+b)\right)' = -a\sin(ax+b)$)

$$= -\sin 2x + \sin x$$
$$= -2\sin x\cos x + \sin x$$
$$= \sin x(-2\cos x + 1)$$
$$= \sin x(1 - 2\cos x)$$

Question bonus : tableau de variations

$$f'(x) = \underbrace{\sin x}_{①}\ \underbrace{(1-2\cos x)}_{②}$$

On étudie le signe de chaque facteur pour $x \in \text{I}$ ($\text{I} = [0\,;2\pi]$).

Le 1[er] facteur s'annule dans I pour 0, π, 2π.

Le 2[e] facteur s'annule dans I pour $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$.

La dérivée de f s'annule donc dans I pour 0, $\frac{\pi}{3}$, π, $\frac{4\pi}{3}$, 2π.

(On peut aussi dire que l'ensemble des solutions de l'équation $f'(x) = 0$ est $S = \left\{0\,;\frac{\pi}{3}\,;\pi\,;\frac{4\pi}{3}\,;2\pi\right\}$)

Étude du signe de sin *x* pour $x \in \text{I}$ (utilisation du cercle trigonométrique).

$\sin x > 0$	$\sin x < 0$	$\sin x = 0$
$0 < x < \pi$	$\pi < x < 2\pi$	$x = \pi$

Étude du signe de $1 - 2\cos x$ pour $x \in \text{I}$ (utilisation du cercle trigonométrique).

$1 - 2\cos x > 0$ $\cos x < \frac{1}{2}$	$1 - 2\cos x < 0$ $\cos x > \frac{1}{2}$	$1 - 2\cos x = 0$ $\cos x = \frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3}$	$0 \leqslant x < \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{4\pi}{3} \leqslant x < 2\pi$	$x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{4\pi}{3}$		2π
Signe de $\sin x$	0	+		+	0	–		–	0
Signe de $1 - 2\cos x$		–	0	+		+	0	–	
Signe de $f'(x)$	0	–	0	+	0	–	0	+	0
Variations de f	$-\frac{1}{2}$	↘	$-\frac{3}{4}$	↗	$\frac{3}{2}$	↘	$-\frac{3}{4}$	↗	$-\frac{1}{2}$

$f(0)=\frac{1}{2}\cos(2\times 0)-\cos 0=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{3}{4}$

$f(\pi)=\frac{1}{2}\cos 2\pi-\cos\pi=\frac{1}{2}-(-1)=\frac{3}{2}$

$f\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\cos\frac{8\pi}{3}-\cos\frac{4\pi}{3}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$

$f(2\pi)=-\frac{1}{2}$

V.

1°) Tableau

	A	B	C	Total
Sans défaut	**1900**	**2880**	**4850**	**9630**
Avec défaut	**100**	**120**	**150**	**370**
Total	**2000**	**3000**	**5000**	**10 000**

2°)

$P(\mathrm{E})=0,2$

$P(\mathrm{F})=0,037$

VI.

1°)

La probabilité d'obtenir le numéro 6 est égale à $\frac{1}{3}$.

La probabilité d'obtenir un numéro pair est égale à $\frac{1}{2}$.

2°) Non.

Une réponse plus précise pourra être donnée en terminale avec la notion de schéma de Bernoulli et de loi binomiale.

Si on répète 120 fois l'expérience aléatoire et que l'on note X le nombre de fois où l'on a obtenu le numéro 6, on démontre que X suit la loi binomiale de paramètres $n=120$ et $p=\frac{1}{3}$.

$P(\mathrm{X}=40)=\binom{120}{40}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{40}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{80}$

VII.

1°) $P(\mathrm{A})=\frac{N}{20}$

2°)

La fréquence de A semble se stabiliser vers le nombre 0,25.

La probabilité de A semble être égale à $\frac{1}{4}$.

Il y a 5 boules blanches.

VIII.

1°)

La personne qui a la probabilité la plus grande de tirer une bille rouge est Aline.

Justification à l'aide de calculs.

Pour calculer les différentes probabilités, on modélise chaque expérience aléatoire par une loi d'équiprobabilité (car les tirages sont effectués au hasard).

Aline

Le sac d'Aline contient $25+72=97$ billes.

La probabilité qu'Aline tire une bille rouge est égale à $p_1=\frac{25}{97}=0,25773...$.

Bernard

Le sac de Bernard contient $10+30=40$ billes.

La probabilité que Bernard tire une bille rouge est égale à $p_2=\frac{10}{40}=0,25$.

Claude

Le sac de Claude contient $40+119=159$ billes.

La probabilité que Claude tire une bille rouge est égale à $p_3=\frac{40}{159}=0,25157...$.

Donc $p_1>p_3>p_2$.

Par suite, Aline a la probabilité la plus grande de tirer une bille rouge.

2°) On cherche le nombre x de billes noires à ajouter au sac d'Aline avant le tirage pour qu'elle ait la même probabilité que Bernard de tirer une bille rouge.

x vérifie l'équation $\frac{25}{x+97}=\frac{10}{40}$ (1) avec la condition $x\in\mathbb{N}$.

$(1)\Leftrightarrow 10x+970=1000$

$\Leftrightarrow 10x=30$

$\Leftrightarrow x=3$

Il faut ajouter 3 billes noires au sac d'Aline avant le tirage pour qu'elle ait la même probabilité que Bernard de tirer une bille rouge.

3°) Le résultat ne reste pas valable. Pour cela, on donne un exemple :

Si on ajoute à chacun 25 billes rouges, $p_1=\frac{50}{122}=0{,}41...$ et $p_2=0{,}54...$

$p_2>p_1$ donc le résultat de la première question n'est plus valable.

Si on ajoute à chacun 20 billes rouges, c'est Bernard qui aura la probabilité de tirer une bille rouge (cette probabilité sera égale à $\frac{1}{2}$).