# 1ère L Option

# Ombres au soleil de solides Perspective cavalière

2<sup>e</sup> partie du cours sur la perspective cavalière.

## I. Observations d'ombres solaires de cubes et de pavés droits

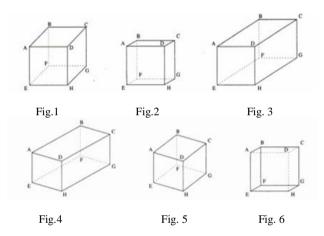
#### 1°) Cas d'un cube

Exposons aux rayons du soleil un cube fait de baguettes et observons l'ombre obtenue sur le sol (supposé plan horizontal).

Chacune des figures ci-dessous peut être l'ombre de ce solide si on l'incline convenablement par rapport au plan de l'ombre.

Les figures 3 et 4 sont par exemple des ombres portées sur le sol par un soleil couchant.

Ceci est tout à fait cohérent avec nos observations précédentes. En effet, les faces du cube sont des carrés : leurs ombres sont donc des parallélogrammes.



#### 2°) Cas d'un pavé droit

Cependant, ces figures pourraient être aussi les ombres solaires d'autres solides. Ainsi, on expérimente facilement que les figures peuvent 3, 4, 5 peuvent être l'ombre d'un parallélépipède rectangle dont aucune face n'est carrée.

#### II. Représentation plane d'un cube ou d'un pavé droit

# 1°) Interprétation des ombres comme représentations planes

Nous admettrons que toutes les figures données dans le I sont des représentations planes possibles d'un cube étant données qu'elles en sont des ombres possibles.

De plus, en nous déplaçant dans diverses directions, nous verrons apparaître la face d'un cube tantôt comme un véritable carré, tantôt comme un parallélogramme. Il est donc normal que la représentation d'un face carrée soit tantôt un carré, tantôt un parallélogramme.

# 2°) Perspectives cavalières de cubes et de pavés droits

Il s'agit de représentations planes de solides sur lesquelles des arêtes de ces solides, effectivement parallèles, sont représentées par des segments parallèles.

La définition d'une perspective parallèle pour l'instant.

# 3°) Les « vus » et les « cachés » : la convention des pointillés

Aux règles de représentation décrites précédemment, s'ajoute celle des « vus » et des « cachés ».

Suivant que l'on considère un cube construit avec des baguettes ou une boîte cubique avec des faces opaques, on apercevra toutes les arêtes ou seulement quelques unes d'entre elles.

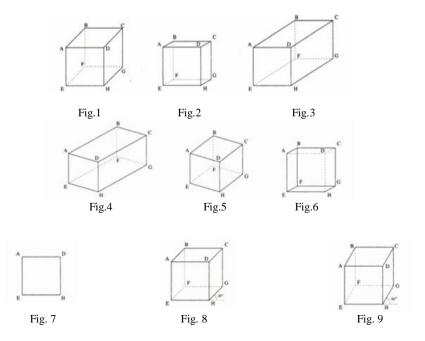
Nous conviendrons de représenter les arêtes vues au moyen d'un trait plein et les arêtes cachées par un trait interrompu.

Par exemple, les figures 1, 2, 3, 4, 5 représentant une boîte cubique dont on ne voit pas les arêtes [BF], [FG] et [EF]. Mais si nous dessinons ces arêtes en trait plein et les arêtes [AD], [DC] et [DH] en pointillés, comme sur la figure 6, cela signifie que nous voyons le cube sous un angle de vue différent (comme s'il était plus haut que l'œil).

# III. Les perspectives cavalières sont multiples

#### 1°) Diverses représentations d'un même cube

Il existe plusieurs perspectives cavalières du cube : les fig. 1 à 6, mais aussi les fig. 7 à 9. En déplaçant le cube par rapport à nous, ou en nous déplaçant par rapport à lui, nous pouvons le voir comme sur chacune de ces figures. Ainsi, nous pouvons incliner les arêtes [AB], [DC], [EF] et [HG] de manière qu'elles nous apparaissent de plus en plus courtes jusqu'à disparaître complètement comme sur la figure 7. De plus, chacune de ces figures peut être l'ombre solaire d'un cube.



#### 2°) Perspectives cavalières particulières

Sur les figures 1, 2, 3, 6, 8, 9 deux faces opposées du cube sont représentées par des carrés : il s'agit là de perspectives cavalières particulières. Elles offrent l'avantage de représenter deux faces du cube « en vraie » grandeur, à l'échelle près bien entendu.

La figure 1 est une perspective très courante : on dessine deux carrés isométriques, BCGF et ADHE, aux côtés parallèles, le sommet F de l'un étant le centre de l'autre, on joint ensuite les sommets appropriés pour faire apparaître les quatre arêtes restantes : [AB], [DC], [EF] et [HG].

Outre le respect du parallélisme des arêtes, les dessinateurs s'imposent souvent d'autres règles de représentation supplémentaires. Par exemple, les figures 8 et 9 dans lesquelles la longueur de [HG] vaut la moitié de celle de [EH] seront jugées esthétiques car elles évoquent bien un cube (comparativement, le solide de la figure 2 peut apparaître trop aplati pour évoquer un cube). Souvent on représente l'arête [HG] (« de côté ») plus courte que l'arête [EH] (« de face »), même s'il existe des ombres solaires du cube dans lesquelles c'est le contraire, comme à la figure 3.

De plus on peut imposer une amplitude à l'angle que forme [HG] avec le prolongement de [EH] : celle-ci vaut  $45^\circ$  sur la fig. 8 et  $60^\circ$  sur la fig. 9. Cela modifie la perception qu'on a de la position du cube par rapport à nous. Cet angle est appelé **angle de fuite.** 

#### A propos des noms des points

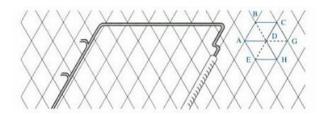
On observera que les points A, B, C, D ayant été marqués, on marque les noms des points E, F, G, H de telle sorte que l'arête [AE] soit perpendiculaire à la face ABCD, l'arête [BF] soit perpendiculaire à ABCD, l'arête [CG] soit perpendiculaire à la face ABCD, l'arête [DH] soit perpendiculaire à la face ABCD.

En fait on « tourne » dans le même sens quand on nomme les points des faces ABCD et EFGH dans cet ordre.

# 3°) Angle de fuite

En pratique, un angle de fuite de 45°, commode lorsque l'on réalise un dessin en perspective sur papier quadrillé, est cependant à éviter : il donne parfois des points placés de telle façon qu'ils devient gênant de faire des raisonnement sur un tel dessin. Mieux vaut adopter un angle de fuite plus petit.

Ces conventions sont arbitraires, bien qu'elles répondent à des critères soit esthétiques, soit pratiques. Ainsi, certains ingénieurs préféreront la représentation de la figure ci-dessous qu'on appelle **perspective isométrique** du cube, où les arêtes [HG], [EH] et [DH] sont représentées de même longueur, comme c'est le cas dans la réalité. Elle leur permet de comparer directement sur leur plan les longueurs des tuyaux qui n'ont pas la même direction, par exemple, des tuyaux parallèles à l'arête [EH].



#### 4°) Des motifs dessinés sur les faces

En respectant les invariants des ombres solaires, on peut dessiner un même motif sur toutes les faces d'un cube, ainsi que le suggèrent les figures ci-dessous.





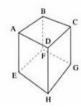
Apparaît ainsi un autre invariant des perspectives cavalières : le rapport des longueurs de segments parallèles (ou dans le prolongement l'un de l'autre).

#### IV. Perspectives avec points de fuite

#### 1°) Un autre type d'ombre

En éclairant un cube au moyen d'une source lumineuse ponctuelle, on peut voir apparaître une ombre semblable à celle de la figure ci-dessous.

Cette ombre n'est pas une perspective cavalière. En effet, seules les arêtes [AE], [DH], [CG] et [BF] y sont dessinées parallèles : les arêtes [AB], [DC], [HG] et [EF] par exemple, qui sont parallèles en réalité, sont représentées par des segments non parallèles.



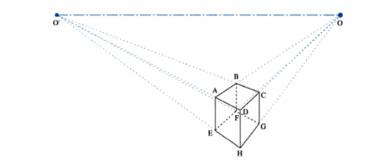
## 2°) Vocabulaire

Rien d'étonnant dès lors à ce que, sur certains dessins tels celui extrait d'un album de Lucky Luke, on représente deux rails de chemins de fer se rejoignant sur... la ligne d'horizon! Or, ces rails sont, en réalité, bel et bien parallèles.



Une **ligne d'horizon** apparaît dès que l'on prolonge certaines arêtes du cube de la figure du 1°). En effet, prolongeons les arêtes [AB], [DC], [HG] et [EF] : elles concourent en un même point O. De même, les prolongements des arêtes [AD], [BC], [EH] et [FG] se rejoignent au point O'.

La ligne d'horizon est alors la droite (OO'). Les points O et O' sont appelés **points de fuite**. Ceci suppose que les arêtes [AB], [DC], ..., [FG] sont horizontales, les arêtes [AE], [BF], [CG] et [DH] étant alors verticales. En effet, c'est parce que les rails sont horizontaux qu'ils se rejoignent sur la ligne d'horizon. S'ils montaient le long d'une colline ou s'ils descendaient dans un tunnel, on les verrait se rejoindre en un point situé au dessus ou au-dessous de la ligne d'horizon



#### 3°) Définition : perspectives avec points de fuite

La représentation plane d'un objet solide, dans laquelle des droites parallèles sont représentées, soit parallèles, soit concourantes en un point de fuite est appelée perspective avec points de fuite. Si les droites parallèles sont horizontales, leur point de fuite appartient à la ligne d'horizon.

Bien sûr, seules des parallèles très longues semblent se rejoindre en un point de fuite. Et les arêtes d'un cube ne sont pas bien longues...

Cependant, il arrive qu'on les représente sur des droites concourantes, par souci d'esthétiques, pour susciter une impression de profondeur.

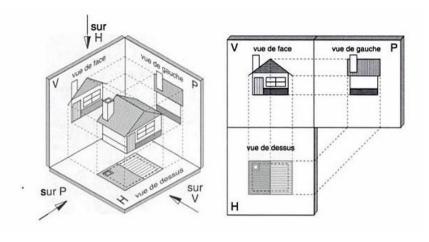
La perspective à point de fuite est aussi appelée perspective centrale ; elle sera étudiée plus en détail en Terminale.

## V. Projections orthogonales

#### 1°) Principe

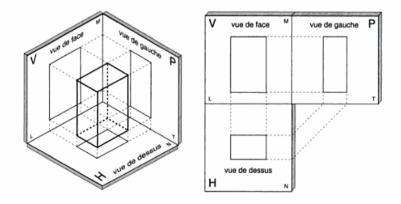
Les perspectives cavalières ne sont pas exemptes d'ambiguïté. Ainsi certains dessins ne permettent pas de distinguer s'il s'agit de la représentation d'un cube ou d'un pavé droit (dont une face est un carré). C'est pourquoi, les dessinateurs et les techniciens complètent les perspectives de projections orthogonales de solides sur lesquels ils travaillent.

Les figures ci-après illustrent ce dont il d'agit. Une « vue de face », une « vue de gauche » et une « vue de dessus » sont jointes à une perspective isométrique d'une maison et d'un parallélépipède rectangle.





Pour obtenir chacune de ces trois vues, on utilise des projections orthogonales.



# 2°) Définition de la projection orthogonale d'un point sur un plan

La projection orthogonale d'un point sur un plan est le pied de la perpendiculaire abaissée du point sur ce plan.

On peut facilement se figurer en quoi consiste cette projection dans le cas où le plan est horizontal, par exemple celui du sol d'une maison.

En effet, il suffit d'imaginer un fil à plomb descendant d'un point jusqu'au sol : l'endroit où la pointe du plomb touche le sol est la projection orthogonale de ce point.



# VI. Un peu de psychologie

La psychologie de la forme (discipline née en Allemagne au début du XX° siècle) a montré que la perception visuelle n'est pas réductible à la sensation enregistrée par la rétine : une même image peut donner lieu à plus d'une perception. Ainsi, la figure 1 peut être perçue par certains comme le portrait d'une jeune fille ; par d'autres comme celui d'une vieille femme (le menton de la première étant le nez de la seconde) ; d'autres encore peuvent aller d'une perception à l'autre. De même, on peut organiser mentalement la figure 2 (J.Jastrow, 1900) pour y voir soit un lapin, soit un canard. Quant à la figure 3, due à Rubin, elle peut être vue soit comme une coupe blanche sur fond noir, soit comme deux profils noirs se faisant face.







Fig.1

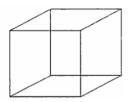
Fig.2

Fig.3

« Loin d'être un phénomène passif, la perception apparaît donc plutôt comme un acte de « décision » au niveau cérébral quant à la signification probable des informations sensorielles pour le sujet » (M. Meulers cité par C.P. Abeloos, 1983).

Bien sûr, ceci a des conséquences sur l'apprentissage de la géométrie, en particulier l'apprentissage plane des objets solides.

Signalons tout d'abord un phénomène d'instabilité de la perception dont il faut rendre les élèves conscients. Comme on l'a vu plus haut, un cube tel qu'il est dessiné ci-dessous, peut apparaître, à certains moments, comme vu de dessous, et à d'autres moments, comme s'il était vu de dessus.



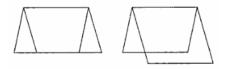
De même, la figure ci-dessous peut être perçue, soit comme un escalier vu d'en haut, soit comme un escalier vu d'en bas. Le tracé des « vus » et des « cachés » peut parfois remédier à cette instabilité. Ou encore, « ombrer » certaines parties de la figure.



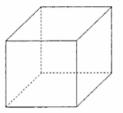
Ensuite, la part d'implicite qui accompagne de nombreux dessins est source d'ambiguïtés pour les élèves. Par exemple, comment savoir, sans regarder la légende, ce que représente la figure ci-dessous : une figure plane est composée de deux parallélogrammes situés dans un même plan et accolés par un côté ou la représentation en perspective cavalière d'un objet solide composé de deux rectangles également accolés par un côté, mais non situés dans un même plan (comme deux pages d'un livre entrouvert) ? En outre, ce dièdre peut être vu, soit ouvert en avant, soit en arrière.



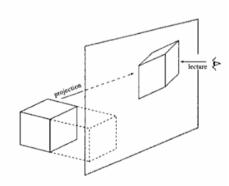
De plus, on peut éviter aux élèves certains pièges en respectant la loi de bonne forme : « de deux interprétations possibles et inégalement simples, inégalement régulières d'une figure, celle qui constituera la perception sera la plus simple, la plus régulière. [...] Soient, par exemple, les deux dessins de la figure cidessous. Celui de gauche, décomposable en trois figures bien symétriques (deux triangles et un trapèze isocèles), est perçu comme plan ; celui de droite qui n'admet pas une aussi belle décomposition dans le plan, est interprétée, comme perspective cavalière de deux rectangles, figures symétriques aussi, accolées par un côté ». (C. Hauchart, 1985)



Enfin cet aspect de la perception permet d'« éclairer » ce que signifient le « réalisme » de certaines images et leur « caractère convenu ». A partir du moment où la perception n'est pas le seul fait de la vision, mais est aussi un acte mental, une décision, il est normal que ce que l'on voit n'est pas très loin de ce que l'on croit voir, ou (comme on l'a dit plus haut) de ce que l'on a appris à y voir. Pour illustrer ces propos et leurs implications pédagogiques, voyons comment est commentée la figure qui suit par l'IREM de Lorraine en 1987 :



« [...] On ne peut guère parler de réalisme », car on ne verra jamais un cube de cette façon... Le phénomène de trompe-l'œil décrit précédemment supposerait en effet un singulier strabisme : il obligerait à déplacer la feuille vers le bas et vers la gauche, aux limites des pratiques communément admises (cf. figure ci-dessous). La projection utilisée ici n'a plus grand-chose de photographique, car le centre logique du dessin ne correspond pas avec le centre de la projection naturelle (c'est-à-dire orthogonale) de l'objet sur le plan de la feuille.



Nous sommes ici en présence d'un **phénomène d'ombre**, le dessin du cube n'est rien d'autre que ce que l'on obtiendrait en matérialisant son ombre sur la feuille, après avoir choisi un **éclairage oblique**, ni trop rasant ni trop surplombant, de façon que les faces avant et arrière apparaissent « correctement » décalées. On ne regarde cependant le dessin obtenu que comme une image normale, jamais dans la direction des rayons lumineux. La figure ci-dessus n'en a pas moins tout pour être un cube, elle présente même l'avantage sur d'autres de signifier que la face avant est un carré.

[...]

C'est une grande partie des difficultés conceptuelles liées à la géométrie dans l'espace qui se manifeste ainsi dès que l'on réfléchit à la notion de perspective. Elles sont enfermées dans la dialectique **lecture/écriture** de l'image, hors de laquelle il n'y a bien souvent aucune explication possible. Le pas est alors vite franchi de considérer qu'il y a d'un côté « ceux qui voient », heureux bénéficiaires de quelque mystérieuse bosse de la géométrie, et de l'autre « ceux qui ne verront jamais rien », désespérément réfractaires à toutes mathématiques.

S'il est une question qui mérite d'être posée, en préalable à tout enseignement de la géométrie dans l'espace, c'est donc bien celle de la puissance d'évocation de l'image, notamment de l'image géométrique. »