Exercices sur les fonctions de plusieurs variables (1)

1 1°) On considère la fonction $F:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$.

$$(x,y)\mapsto\frac{xy}{|x|+|y|}$$

a) La fonction F est-elle prolongeable par continuité en (0, 0) ?
b) Est-elle bornée ?
2°) Soit φ une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(0)=0$ et dérivable en 0.
On considère la fonction $G:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$.

$$(x,y)\mapsto\frac{\varphi(xy)}{|x|+|y|}$$

La fonction G est-elle prolongeable par continuité en $(0\,;0)$?

2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=xy\ln(x^2+y^2)$ si $(x,y)\neq(0,0)$ et $f(0,0)=0$ sinon.
La fonction f est-elle continue ?

3 Soit f la fonction définie par $f(x,y)=\dfrac{\sin x-\sin y}{\operatorname{sh}x-\operatorname{sh}y}$ pour tout couple (x,y) de réels tels que $x\neq y$.

1°) Soit Φ et Ψ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(t)=\dfrac{\cos t}{\operatorname{ch}t}$; $\Psi(t)=\dfrac{\sin t}{\operatorname{sh}t}$ si $t\neq0$ et $\Psi(0)=1$.
Démontrer que Φ et Ψ sont continues sur $\mathbb{R}$.

2°) Vérifier que pour tout couple (x,y) de réels tels que $x\neq y$, on a : $f(x,y)=\Phi\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\Psi\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$.

3°) Etudier l'existence d'une limite en $(0\,;0)$ de la fonction f.

4 1°) On considère deux fonctions $f:I\to\mathbb{R}$ et $g:J\to\mathbb{R}$ continues (I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un singleton).
Démontrer que la fonction $F:I\times J\to\mathbb{R}$ est continue.

$$(x,y)\mapsto f(x)\times g(y)$$

2°) Démontrer que $(x,y)\mapsto\max(x,y)$ et $(x,y)\mapsto\min(x,y)$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ (donner une expression à l'aide de valeurs absolues).
3°) Démontrer que la fonction K définie sur $\mathbb{R}^2$ par $K(x,y)=x(1-y)$ si $x\geq y$ et $K(x,y)=y(1-x)$ si $x<y$ est continue.
4°) Soit u une fonction continue de [0 ; 1] dans $\mathbb{R}$.
Soit φ la fonction définie par $\varphi(x)=\displaystyle\int_0^1 K(x,y)\,u(y)\,\mathrm{d}y$.
a) Démontrer que φ est définie sur [0 ; 1].
b) Démontrer que φ est de classe C^2 sur [0 ; 1].

5 Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On considère la fonction Φ définie par $\Phi(x,y)=f(x)+g(y)$.
Démontrer que Φ est continue si et seulement si f et g sont continues.

6 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un singleton.
Soit $f:I\to\mathbb{R}$ une fonction continue et injective.
1°) On pose $A=\{(x,y)\in I^2\,/\,x<y\}$.
Démontrer que A est convexe.
2°) On considère la fonction $\Phi:\ A\to\mathbb{R}$.

$$(x,y)\mapsto\Phi(x,y)=f(y)-f(x)$$

Démontrer que Φ est de signe constant.
Indication : raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe deux éléments (α_1,β_1) et (α_2,β_2) dans A tels que $\Phi(\alpha_1,\beta_1)$ et $\Phi(\alpha_2,\beta_2)$ soient de signes contraires et introduire la fonction φ définie sur $[0\,;1]$ par $\varphi(t)=\Phi\big(t\alpha_1+(1-t)\alpha_2,\,t\beta_1+(1-t)\beta_2\big)$.

En déduire que f est strictement monotone.

7 1°) Soit Φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\Phi(t)=\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}$ si $t<0$ et $\Phi(t)=0$ si $t\geq0$.
Démontrer que Φ est continue sur $\mathbb{R}$.

2°) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2+y^2-1}}$ si $x^2+y^2<1$ et $f(0,0)=0$ sinon.
Etudier la continuité de f.

8 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=\dfrac{y^2}{x}$ si $x\neq0$ et $f(0,y)=0$.
On se propose d'étudier la continuité de f.
1°) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,y)\ ;\ y\in\mathbb{R}\}$.
2°) Soit y_0 un réel non nul.
Etudier la continuité en $(0,y_0)$.
3°) a) Déterminer et représenter les lignes de niveau de f.
b) Etudier la continuité de f en 0.

9 Démontrer que les projections canoniques de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sont ouvertes (c'est-à-dire que l'image d'un ouvert est un ouvert).

10 Soit f la fonction définie par $f(x,y)=\dfrac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

La fonction f admet-elle une limite en (0, 0) ?

11 Déterminer toutes les applications f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout triplet (x, y, z) de réels on ait :
$f(x,y)+f(y,z)+f(z,x)=0$.

12 1°) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = (x^2 + y^2)\sin\dfrac{1}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$ sinon.
Etudier la continuité de f.

2°) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x, y) = \dfrac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $g(0, 0) = 0$ sinon.
Etudier la continuité de g.

13 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$ sinon.
1°) Etudier la continuité des applications partielles de f en (0, 0).
2°) Etudier la continuité de f en (0, 0).

14 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \dfrac{x^2}{2} + y^2 - 1$ si $x^2 + y^2 > 1$ et $f(x, y) = -\dfrac{x^2}{2}$ si $x^2 + y^2 \leq 1$.
Etudier la continuité de f.

15 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x\,;y) = 1$ si $0 < x < y^2$ et $f(x\,;y) = 0$ sinon.
On note $\boldsymbol{D}$ l'ensemble des couples (x, y) de réels tels que $0 < x < y^2$ et $\boldsymbol{D}'$ le complémentaire de $\boldsymbol{D}$ dans $\mathbb{R}^2$.

1°) Représenter sur une figure les domaines $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{D}'$.
Caractériser par des inéquations le domaine $\boldsymbol{D}'$.
2°) Soit $h = (a\,;b)$ un élément fixé non nul de $\mathbb{R}^2$.
On considère la fonction φ définie par $\varphi(t) = f(th)$.
Donner la valeur de $\varphi(0)$.
3°) Déterminer l'ensemble des réels t que l'on ait : $th \in \boldsymbol{D}'$.
On distinguera 4 cas :
1er cas : $a = 0$ et $b \neq 0$;
2e cas : $a \neq 0$ et $b = 0$;
3e cas : $a > 0$ et $b \neq 0$;
4e cas : $a < 0$ et $b \neq 0$.
4°) A l'aide de la question précédente, déterminer la valeur de la fonction φ dans un voisinage de 0.
En déduire que f est dérivable en $(0\,;0)$ selon tout vecteur non nul.

16 1°) Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par la donnée de ses deux premiers termes u_0 et u_1 et la relation de récurrence : $6u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
2°) Déterminer toutes les applications f continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout couple (x, y) de réels on ait : $f(x, y) = f\left(y, \dfrac{1}{6}(x + y)\right)$.

17 On note D le disque fermé de centre (0, 0) et de rayon 1.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ si $(x, y) \in D$ et $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ si $(x, y) \notin D$.
1°) Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}^2$.
2°) Etudier la continuité de f.

18 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2$ si $|x| \leqslant |y|$ et $f(x, y) = y^2$ si $|x| \geqslant |y|$.
Etudier la continuité de f.

19 Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}^2$.
On suppose que $f(2, 0) = 1$ et que $f(-2, 0) = -1$.
Démontrer qu'il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que $f(x, y) = 0$.

20 Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x, y) = \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{2x - y}{x + y}\right)$.

21 Soit $B = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x + y + z < 1,\ xyz > 0 \right\}$.
1°) Démontrer que B est une partie ouverte de $\mathbb{R}^3$.
2°) a) Soit M un réel strictement positif. Démontrer que $\left(\mathrm{M}, -\mathrm{M}, -\dfrac{1}{\mathrm{M}}\right)$ est un élément de B.
b) B est-elle une partie bornée de $\mathbb{R}^3$?

22 Etudier l'existence d'une limite en (0, 0) pour la fonction f définie par $f(x, y) = \dfrac{\sin x - \sin y}{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y}$.

23 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \dfrac{y^2 + 2}{x}\sin x \operatorname{ch} y$ si $x \neq 0$ et $f(0, y) = (y^2 + 2)\operatorname{ch} y$.

1°) Etudier la continuité de f.
2°) L'ensemble $E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^3 \;/\; f(x, y) \leq 1 \right\}$ est-il borné ? fermé ?

24 On considère la fonction f : $\begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto |x| + |y| \end{array}$.

Déterminer les lignes de niveau de f.

25 On considère la fonction f : $\begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \dfrac{xy}{x^2 + y^2} \end{array}$.

1°) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en (0, 0) ?
2°) Déterminer si f admet des extrema et les points où ils sont atteints.

26 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et a un élément fixé dans Ω.

Soit f une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On suppose qu'il existe une fonction g définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, continue en a telle que $g(a)=0$ et pour tout $m \in \Omega \mid f(m) \mid \leq g(m)$.

Démontrer que f est continue en a.

27 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x \operatorname{Arctan}\left[\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]$ si $x \neq 0$ et $f(0, y) = 0$ sinon.

Etudier la continuité de f.

28 Soit f la fonction définie sur $(\mathbb{R}_+)^2$ par $f(x, y) = \frac{1}{q_1 + q_2}$ si $x = \frac{p_1}{q_1}$ et $y = \frac{p_2}{q_2}$ sont deux éléments de $\mathbb{Q}_+$ avec p_1, q_1, p_2, q_2 entiers naturels tels que $p_1 \wedge q_1 = 1$ et $p_2 \wedge q_2 = 1$ et $f(x, y) = 0$ sinon.

Le but de l'exercice est d'étudier la continuité de f.

1°) Soit $(a, b) \in (\mathbb{Q}_+)^2$. Etudier la continuité de f en (a, b).

2°) Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2 \setminus (\mathbb{Q}_+)^2$. On suppose que $a \in \mathbb{Q}_+$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note F_n l'ensemble des rationnels dans [0, 1] qui peuvent s'écrire avec un dénominateur inférieur ou égal à n.

a) Démontrer que F_n est un ensemble fini.

b) On pose $\alpha_n = \min_{r \in F_n} \mid r - a \mid$. Démontrer que $\alpha_n > 0$.

c) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+{}^2$. Démontrer que si l'on a : $\mid x - a \mid < \alpha_n$, alors $f(x, y) < \frac{1}{n}$.

d) La fonction f est-elle continue en (a, b) ?

28 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 - y^2}$ si $x^2 \neq y^2$ et $f(x, y) = \frac{3}{2}x$ sinon.

Etudier la continuité de f.

29 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$ sinon.

1°) Démontrer que la « restriction » de f à $\mathbb{R}u$, u étant un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$, est continue en (0, 0).

2°) La fonction f est-elle continue en (0, 0) ?

30 Soit f une fonction de classe C^1 sur un intervalle I (non vide, non réduit à un singleton).

On considère la fonction F définie sur I^2 par $F(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$ si $x \neq y$ et $F(x, x) = f'(x)$.

1°) Démontrer que pour tout couple (x, y) d'éléments de I on a : $F(x, y) = \int_0^1 f'(tx + (1-t)y) \, dt$.

2°) Etudier la continuité de F.

On pourra utiliser le théorème rappelé ci-dessous :

Soit X un intervalle non vide, non réduit à un singleton.

Soit f une application continue de $X \times [a, b]$ (a et b sont deux réels vérifiant $a < b$) dans $\mathbb{R}$.

L'application $\varphi : X \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \int_a^b f(x, t) \, dt$ est continue sur X.

31 Soit f la fonction définie par $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^4}$

Etudier la limite de f en (0, 0).

On utilise les règles d'opérations algébriques sur les limites. On utilise la continuité des projections.

La limite de f en (0 ; 0) est égale à $+\infty$.

31 Soit f la fonction définie par $f(x, y) = \mathrm{E}(x^2 + y^2)$.

Etudier la continuité de f.

32 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \frac{\sin x - \sin y}{x - y}$ pour tout couple (x, y) de réels tels que $x \neq y$ et $f(x, x) = \cos x$.

1°) Soit Φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(t) = \frac{\sin t}{t}$ si $t \neq 0$ et $\Phi(0) = 1$.

Démontrer que Φ est continue sur $\mathbb{R}$.

2°) Vérifier que pour tout couple (x, y) de réels, on a : $f(x, y) = \Phi\left(\frac{x - y}{2}\right) \times \cos\left(\frac{x + y}{2}\right)$.

3°) Etudier la continuité de f.

33 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \frac{e^x - e^y}{x - y}$ pour tout couple (x, y) de réels tels que $x \neq y$ et $f(x, x) = e^x$.

1°) Soit Φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(t) = \frac{e^t - 1}{t}$ si $t \neq 0$ et $\Phi(0) = 1$.

Démontrer que Φ est continue sur $\mathbb{R}$.

2°) Vérifier que pour tout couple (x, y) de réels, on a : $f(x, y) = \Phi(x - y) \times e^y$.

3°) Etudier la continuité de f.

34 Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On pose $F(x, y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t) \, dt$.

Etudier la continuité de F sur $\mathbb{R}^2$.

35 Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $F(x, y) = y - x^2$ si $y \leq x^2$ et $F(x, y) = 0$ sinon.

Etudier la continuité de F.

36 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \dfrac{x\sin y - y\sin x}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$ sinon.

1°) Etudier la continuité de f.

On commencera par démontrer que pour tout réel t on a : $|\sin t - t| \leq \dfrac{t^2}{2}$.

2°) Donner après avoir justifié son existence, le développement limité d'ordre 1 de f en $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Correction

1 1°) a) On passe en polaires.
On pose : $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

$$F(x, y) = F(r\cos\theta, r\sin\theta) = r\frac{\sin 2\theta}{2(|\cos\theta| + |\sin\theta|)}$$

$|\sin 2\theta| \leq 1$

$|\cos\theta| + |\sin\theta| \geq 1$ car $|e^{i\theta}| = |\cos\theta + i\sin\theta| \leq |\cos\theta| + |\sin\theta|$

Donc $|F(x, y)| \leq \dfrac{r}{2}$

D'où $F(x, y) \xrightarrow[(x, y)\to(0, 0)]{} 0$

On peut prolonger F par continuité en posant $\widetilde{F}(0, 0) = 0$.

Autre méthode :

On pose $f(\theta) = \dfrac{\sin 2\theta}{2(|\cos\theta| + |\sin\theta|)}$.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, continue et périodique de période 2π.

Elle est donc bornée sur $[0 , 2\pi]$ et par conséquent sur $\mathbb{R}$.

Il existe donc un réel M tel que pour tout réel θ, on ait : $|f(\theta)| \leq M$.

On termine comme avec la première méthode.

b) F n'est pas bornée (regarder la restriction de f à la 1ère bissectrice).

2°) $G(x, y) = \dfrac{xy}{|x| + |y|}(\varphi'(0) + \varepsilon(xy))$

8 2°) f n'est pas continue (pas de limite) 3°) b) f n'est pas continue (pas de limite).

10 $$f(x, y) = \frac{2\sin\left(\dfrac{x^2 + y^2}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x^2 - y^2}{2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{2\sin\left(\dfrac{x^2 + y^2}{2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \times \cos\left(\frac{x^2 - y^2}{2}\right).$$

La limite de la fonction f en (0, 0) est égale à 0.

11 Commencer par établir des petites propriétés sur f : $f(a, a) = ?$ Lien entre $f(x, 0)$ et $f(0, x)$?
Poser $\varphi(x) = f(x, 0)$.
Etablir la relation $f(x, y) = \varphi(x) - \varphi(y)$.

14 On considère la fonction Φ définie par $\Phi(t) = 0$ si $t \leq 0$ et $\Phi(t) = t$ si $t \geq 0$.

On vérifie que $f(x, y) = \Phi(x^2 + y^2 - 1) - \dfrac{x^2}{2}$.

Φ est continue sur $\mathbb{R}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

15 3°)

1er cas : $\mathbb{R}$

2e cas : $\mathbb{R}$

3e cas : $\left]-\infty\,;\dfrac{a}{b^2}\right]$

4e cas : $\left[\dfrac{a}{b^2}\,;+\infty\right[$

17 $f(x,y)=\sqrt{\left|1-x^2-y^2\right|}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

35 $F(x,y)=\dfrac{x^2-y-\left|y-x^2\right|}{2}$

Questions de cours

1 Applications partielles

2 Convexité des boules.

3 Les inclusions de boules et les inégalités de normes se correspondent (prendre les 3 normes particulières).

4 Pour une fonction numérique de deux variables, définition des limites en un point (limite finie et infinie). Continuité.

5 Notion de chemin. Utilisation.

6 Parties ouvertes et fermées de $\mathbb{R}^2$.

7 **Lemme d'extension**

Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Les fonctions $(x\,;y)\mapsto f(x)$ et $(x\,;y)\mapsto f(y)$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple d'utilisation.

8 Fonctions lipschitziennes.