TS Exercices sur la géométrie dans l'espace (niveau 1)

Dans tous les exercices, l'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Aucune figure n'est demandée dans ces exercices sauf pour l'exercice $\boxed{5}$.

$\boxed{1}$ Donner dans la colonne de droite les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ normal à *P*.

Équation de *P*	**Coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ normal à *P***
$2x-6y+2z-7=0$	
$z-x=0$	
$x+2y=5-3z$	

$\boxed{2}$ On considère le plan *P* d'équation cartésienne $3x+y-4z+1=0$.
1°) Déterminer un vecteur $\vec{n}$ normal à *P*.
2°) Déterminer une équation cartésienne du plan *Q* parallèle à *P* passant par le point A(1 ; 2 ; 0).

$\boxed{3}$ On considère le plan *P* d'équation cartésienne $x+y-2z+5=0$ ainsi que les points A(– 5 ; – 4 ; 4) et B(1 ; 2 ; – 8).
La droite (AB) est-elle orthogonale au plan *P* ?

$\boxed{4}$ On considère les points A(2 ; 1 ; 3), B(1 ; 0 ; – 1), C(4 ; 0 ; 0), D(0 ; 4 ; 0) et E(1 ; – 1 ; 1).
1°) Les points C, D, E sont-ils alignés ?
2°) Démontrer que (AB) $\perp$ (CDE).

$\boxed{5}$ On considère le plan *P* d'équation cartésienne $x+2y+3z-6=0$.
1°) Déterminer les points d'intersection de *P* avec les axes du repère.
2°) Représenter *P*.

$\boxed{6}$ On donne le point A(2 ; – 5 ; 4).
Donner sans calcul

- une équation du plan P_1 passant par A et parallèle au plan (xOy) ;
- une équation du plan P_2 passant par A et parallèle au plan (yOz) ;
- une équation du plan P_3 passant par A et parallèle au plan (zOx).

$\boxed{7}$ Déterminer la position relative des plans *P* et *Q* d'équations cartésiennes respectives :
$x-2y+z-1=0$ et $2x-4y+2z-1=0$.

$\boxed{8}$ On considère la droite *D* de repère (A ; $\vec{u}$) avec A(– 3 ; 1 ; 4) et $\vec{u}\left(-1\,;\,\dfrac{3}{2}\,;\,2\right)$.
1°) Donner un système d'équations paramétriques de *D*.
2°) Calculer les coordonnées du point d'intersection I de *D* avec le plan (xOy).

$\boxed{9}$ On considère la droite *D* admettant pour système d'équations paramétriques $\begin{cases} x=1-t \\ y=4+t \\ z=3-2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

1°) Donner un repère de *D*.
2°) Le point E(6 ; – 1 ; 13) appartient-il à *D* ? Le point F(2 ; 3 ; 1) appartient-il à *D* ?

$\boxed{10}$ On considère les droites *D* et *D'* précisées chacune par un système d'équations paramétriques

$$D \begin{cases} x=3t \\ y=2t \\ z=2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \qquad D' \begin{cases} x=-9+\dfrac{9}{2}t' \\ y=5+3t' \\ z=1+3t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R}) \quad .$$

Les droites *D* et *D'* sont-elles parallèles ?

$\boxed{11}$ On considère la droite *D* admettant pour système d'équations paramétriques $\begin{cases} x=5-t \\ y=1+4t \\ z=-3 \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.
1°) Démontrer que *D* est parallèle à l'un des plans de coordonnées.
2°) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite *D'* parallèle à *D* passant par le point A(– 1 ; 7 ; 0).

$\boxed{12}$ On considère la droite *D* admettant pour système d'équations paramétriques $\begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

1°) Déterminer une équation cartésienne du plan *P* passant par le point A(1 ; 2 ; 0) et orthogonal à *D*.
2°) Déterminer les coordonnées du point d'intersection I de *D* et *P*.

$\boxed{13}$ On considère le plan *P* d'équation $x+y-z=1$ ainsi que le point A(– 3 ; 2 ; 1).
1°) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite *D* passant par le point A et orthogonale à *P*.
2°) En déduire les coordonnées du point A', projeté orthogonal de A sur le plan *P*.

$\boxed{14}$ On considère le plan *P* d'équation cartésienne $x+2y+3z-5=0$.
1°) Calculer la distance du point A(2 ; – 2 ; 2) au plan *P*.
2°) Déterminer une équation de la sphère *S* de centre A et tangente à *P*.

$\boxed{15}$ On considère les points A(1 ; 2 ; – 1) et B(0 ; – 2 ; 3).
Le but de l'exercice est de déterminer une équation cartésienne du plan médiateur *P* du segment [AB] par deux méthodes indépendantes (il faut faire les deux méthodes).

1ère méthode : en utilisant la définition du plan médiateur d'un segment

Rappeler la définition de *P* :
« *P* est le plan … ».
Calculer les coordonnées du milieu I de [AB] et déterminer une équation cartésienne de *P* en rédigeant convenablement.

2e méthode : en utilisant la caractérisation du plan médiateur d'un segment

Rappeler la propriété : « Un point appartient à *P* si et seulement si… ».

Déterminer alors une équation cartésienne de P en rédigeant ainsi :

« Soit M(x ; y ; z) un point quelconque de l'espace.

$$\begin{aligned} \mathrm{M} \in P &\Leftrightarrow \mathrm{MA} = \mathrm{MB} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{MA}^2 = \mathrm{MB}^2 \\ &\Leftrightarrow \ \dots \text{ »} \end{aligned}$$

16 On considère les points A(2 ; 1 ; 2) et B(– 2 ; 0 ; 2).
Le but de l'exercice est de déterminer une équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$ de diamètre [AB] par deux méthodes indépendantes (il faut faire les deux méthodes).

1ère méthode : en utilisant l'orthogonalité

Déterminer alors une équation cartésienne de $\mathcal{S}$ en rédigeant ainsi :

« Soit M(x ; y ; z) un point quelconque de l'espace.

$$\begin{aligned} \mathrm{M} \in \mathcal{S} &\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MA}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{MB}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \dots \\ &\Leftrightarrow \dots \text{ »} \end{aligned}$$

2e méthode : en utilisant le centre et le rayon de $\mathcal{S}$

Calculer la distance AB et les coordonnées du milieu I de [AB].
Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{S}$.

17 On considère les droites D et D' précisées chacune par un système d'équations paramétriques

$$D \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2t \\ z = 1-t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{et } D' \begin{cases} x = 2t' \\ y = 3-2t' \\ z = 1+t' \end{cases} \quad (t' \in \mathbb{R}).$$

Démontrer qu'il existe un point M de D et un point M' de D' tel que le point I$\left(-\frac{3}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right)$ soit le milieu de [MM'].

18 On considère les points A(1 ; 2 ; – 1) et B(2 ; 1 ; 0).
Déterminer une équation de l'ensemble $\mathcal{S}$ des points M(x ; y ; z) de $\mathcal{E}$ tels que $2\,\mathrm{MA}^2 - \mathrm{MB}^2 = 8$.
En déduire la nature de $\mathcal{S}$.

19 On donne le point A(0 ; 4 ; 0).
Donner une équation du plan médiateur P du segment [OA].

20 On considère le demi-espace fermé E_1 défini par l'inéquation : $x - 2y + 3z - 5 \geqslant 0$.

Préciser parmi les points suivants ceux s'ils appartiennent ou non à E_1 :
A(1 ; 1 ; 1), B(0 ; – 4 ; 1), C(2 ; 2 ; – 3), D(– 3 ; 0 ; 2).

21 Donner une inéquation caractérisant le demi-espace ouvert E_1 admettant le plan P d'équation cartésienne $2x - y - z + 6 = 0$ pour frontière et qui contient le point A(– 2 ; 4 ; 2).

Corrigés

2 1°) On sait que le vecteur $\vec{n}(3 ; 1 ; -4)$ est un vecteur normal à P.

2°) P // Q donc $\vec{n}$ est aussi un vecteur normal à Q.
Q admet donc une équation cartésienne de la forme $3x + y - 4z + d = 0$.
Or A $\in Q$ donc $3x_A + y_A - 4z_A + d = 0$ d'où $d = -5$
On en déduit que Q a pour équation cartésienne $3x + y - 4z - 5 = 0$

Autre méthode : on peut aussi utiliser un point M (x, y, z).

3 On sait que $\vec{n}(1 ; 1 ; -2)$ est un vecteur normal à P.
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}(6 ; 6 ; -12)$
On observe que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 6\vec{n}$.
On en déduit que $\vec{n}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ sont colinéaires. Par suite $(\mathrm{AB}) \perp P$.

N.B. : On ne peut pas utiliser de vecteur directeur pour un plan. En effet, il n'y a pas de vecteur directeur pour un plan. Il faut deux vecteurs non colinéaires pour diriger un plan.

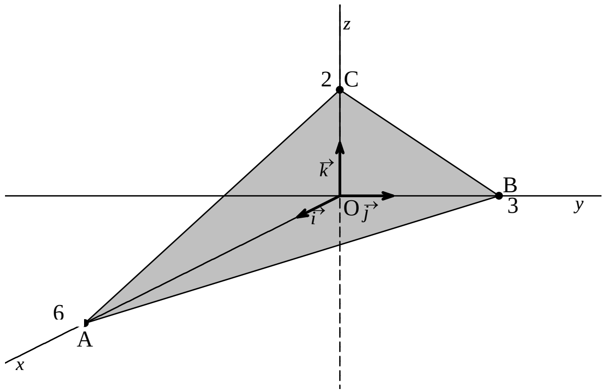
4 1°) $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ (– 4 ; 4 ; 0) ; $\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ (– 3 ; – 1 ; 1)
Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles donc les points C, D, E ne sont pas alignés.
2°) Il suffit de démontrer que $(\mathrm{AB}) \perp (\mathrm{CD})$ et que $(\mathrm{AB}) \perp (\mathrm{CE})$ (en effet, (CD) et (CE) sont deux droites sécantes du plan (CDE) ; on utilise la propriété « si une droite est orthogonale à deux droites sécantes d'un plan, alors elle est orthogonale à ce plan »).

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (– 1 ; – 1 ; – 4)

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{CD}} = x_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} \times x_{\overrightarrow{\mathrm{CD}}} + y_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} \times y_{\overrightarrow{\mathrm{CD}}} + z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} \times z_{\overrightarrow{\mathrm{CD}}} = \dots = 0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \bullet \overrightarrow{\mathrm{CE}} = x_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} \times x_{\overrightarrow{\mathrm{CE}}} + y_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} \times y_{\overrightarrow{\mathrm{CE}}} + z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} \times z_{\overrightarrow{\mathrm{CE}}} = \dots = 0$$

5 1°) Soit A le point d'intersection de P avec l'axe (Ox).

A $\in$ (Ox) donc $y_A = 0$ et $z_A = 0$.
A$\in P$ donc $x_A + 2y_A + 3z_A - 6 = 0$ d'où $x_A + 2\times 0 + 3\times 0 - 6 = 0$ soit $x_A - 6 = 0$ donc $x_A = 6$.
$P \cap (\mathrm{O}x) = \{\mathrm{A}\}$ avec A(6 ; 0 ; 0) ; $P \cap (\mathrm{O}y) = \{\mathrm{B}\}$ avec B(0 ; 3 ; 0) ; $P \cap (\mathrm{O}z) = \{\mathrm{C}\}$ avec C(0 ; 0 ; 2).
2°) Le plan est représenté par le triangle ABC.
N.B. En général, on représente un plan par un parallélogramme ; c'est l'un des rares cas où l'on représente un plan par un triangle. Il faut cependant garder à l'esprit qu'un plan est infini dans toutes les directions.



On dit l'on a représenté le plan P par ses **traces** sur les plans de base.

$\boxed{6}$ Application directe du cours : équations de plans parallèles aux plans de coordonnées

A(2 ; – 5 ; 4)

P_1 : plan passant par A et parallèle au plan (xOy)

P_2 : plan passant par A et parallèle au plan (yOz)

P_3 : plan passant par A et parallèle au plan (zOx)

$P_1 : z = 4$

$P_2 : x = 2$

$P_3 : y = -5$

$\boxed{7}$ P et Q sont strictement parallèles.

Solution détaillée :

D'après l'équation cartésienne de P, on peut dire que le vecteur $\vec{n}(1\,;-2\,;1)$ est un vecteur normal à P.
D'après l'équation cartésienne de Q, on peut dire que le vecteur $\vec{n'}(2\,;-4\,;2)$ est un vecteur normal à Q.
On remarque que $\vec{n'}=2\vec{n}$ donc $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont colinéaires. Par suite, P et Q sont parallèles.

Q a aussi pour équation cartésienne $x-2y+z-\frac{1}{2}=0$ donc les plans P et Q ne sont pas confondus.

On peut donc en déduire que P et Q sont strictement parallèles (c'est-à-dire non confondus).

$\boxed{8}$ 1°) On applique la formule du cours sur les équations paramétriques de droites.

On choisit soi-même la lettre pour désigner le paramètre (pas de lettre imposée).
Ce paramètre est souvent noté t ou λ.

Un système d'équations paramétriques de D s'écrit $\begin{cases} x=-3-t \\ y=1+\frac{3}{2}t \\ z=4+2t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$.

N.B. : Il n'y a pas d'équations paramétriques de droites dans l'espace.

2°) Le plan (xOy) a pour équation $z = 0$ donc $z_{\text{I}}=0$.

On utilise ensuite le système d'équations paramétriques de la droite D.
Le paramètre t du point I sur la droite D vérifie l'équation $4 + 2t = 0$.
Donc $t = -2$.
Grâce au système d'équations paramétriques de D, on obtient :
$x_{\text{I}}=-3-(-2)=-1$ et $y_{\text{I}}=1+\frac{3}{2}\times(-2)=1-3=-2$.
On trouve $\text{I}(-1\,;\,-2\,;0)$.

$\boxed{9}$ 1°) Un repère de la droite D est (A ; $\vec{u}$) avec A(1 ; 4 ; 3) et $\vec{u}$ (– 1 ; 1 ; – 2).

Repère d'une droite :

On appelle repère d'une droite (dans le plan ou dans l'espace) un couple formé d'un point de la droite et d'un vecteur directeur de la droite.

Une droite admet une infinité de repères.

Conventionnellement, un repère est désigné en écrivant d'abord le point puis le vecteur directeur.

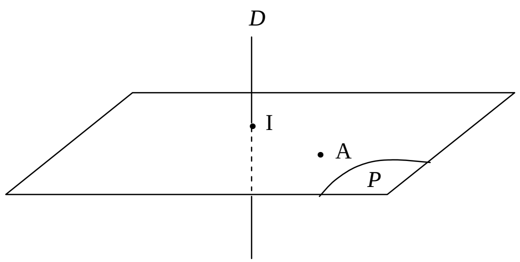
2°) E $\in D$ ($t = -5$) ; F $\notin D$

$\boxed{10}$ D // D' (déterminer un vecteur directeur de chacune des deux droites et démontrer qu'ils sont colinéaires)

$\boxed{11}$ 1°) La droite D est incluse dans le plan P d'équation $z = -3$.
D'autre part, P est parallèle au plan (xOy) (en effet, un plan parallèle au plan (xOy) admet une équation de la forme $z = a$ où a est un réel fixé). Or si deux plans sont parallèles, alors toute droite incluse dans l'un est parallèle à l'autre. Donc D // (xOy).

2°) D' $\begin{cases} x=-1-t \\ y=7+4t \\ z=0 \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

$\boxed{12}$ Faire une figure assez soignée pour se représenter la situation.



1°) $P : x - y + 2z + 1 = 0$ 2°) On trouve $t = -\frac{1}{6}$; $\mathrm{I}\left(\frac{5}{6}\ ;\ \frac{7}{6}\ ;\ -\frac{1}{3}\right)$

Détail de la résolution :

1°) D'après le système d'équations paramétriques de D donné dans l'énoncé, on peut dire que le vecteur $\vec{u}(1\,;-1\,;2)$ est un vecteur directeur de D.

Or $D \perp P$ donc le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur normal à P.

Par conséquent, P admet une équation cartésienne de la forme $x - y + 2z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

Or le point A appartient à P donc $1 - 2 + d = 0$ d'où $d = 1$.

Une équation cartésienne de P s'écrit donc $x - y + 2z + 1 = 0$.

2°) Le point I est le point d'intersection de D et de P donc son paramètre t vérifie l'équation :

$1 + t - 1 + t + 4t + 1 = 0$ (1)

(1) $\Leftrightarrow 6t = -1$

$\Leftrightarrow t = -\frac{1}{6}$

D'où $\begin{cases} x_{\mathrm{I}} = 1 - \frac{1}{6} \\ y_{\mathrm{I}} = 1 + \frac{1}{6} \\ z_{\mathrm{I}} = 2 \times \left(-\frac{1}{6}\right) \end{cases}$

Donc $\begin{cases} x_{\mathrm{I}} = \frac{5}{6} \\ y_{\mathrm{I}} = \frac{7}{6} \\ z_{\mathrm{I}} = -\frac{1}{3} \end{cases}$

$\mathrm{I}\left(\frac{5}{6}\ ;\ \frac{7}{6}\ ;\ -\frac{1}{3}\right)$

$\boxed{13}$ 1°) $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ 2°) Rédaction type : « Le paramètre t du point A' vérifie l'équation … ».

On trouve $t = 1$; $\mathrm{A'}(-2\ ;\ 3\ ;\ 0)$.

Détail de la résolution :

1°) D'après l'équation du plan P donnée dans l'énoncé, on peut dire que le vecteur $\vec{u}(1\,;1\,;-1)$ est un vecteur normal à P.

Or $D \perp P$ donc le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D.

Or $\mathrm{A} \in D$ donc un système d'équations paramétriques de D s'écrit : $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

2°) Le point A' est le projeté orthogonal de A sur le plan P donc A' est le point d'intersection de D et P.

Le paramètre t du point A' vérifie l'équation : $-3 + t + 2 + t - 1 + t = 1$ (1)

(1) $\Leftrightarrow 3t = 3$

$\Leftrightarrow t = 1$

D'où $\begin{cases} x_{\mathrm{A'}} = -3 + 1 \\ y_{\mathrm{A'}} = 2 + 1 \\ z_{\mathrm{A'}} = 1 - 1 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} x_{\mathrm{A'}} = -2 \\ y_{\mathrm{A'}} = 3 \\ z_{\mathrm{A'}} = 0 \end{cases}$

Conclusion : A'(– 2 ; 3 ; 0)

$\boxed{14}$ P : $x + 2y + 3z - 5 = 0$

1°) A(2 ; – 2 ; 2)

Calcul de d(A, *P*)

$\mathrm{d}(\mathrm{A},\, P) = \frac{\left|1 \times 2 + 2 \times (-2) + 3 \times 2 - 5\right|}{\sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$ (formule du cours de distance d'un point à un plan)

2°) S : sphère de centre A tangente à P

Équation de *S*

Une équation de S s'écrit : $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 + (z - 2)^2 = \frac{1}{14}$.

Il n'est pas utile de développer cette équation pour la mettre sous forme cartésienne.

15 Équation d'un plan médiateur

$\mathrm{I}\left(\dfrac{1}{2}\ ;0\ ;1\right)$

Rappel : coordonnées du milieu d'un segment

Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_\mathrm{A}+x_\mathrm{B}}{2}\ ;\dfrac{y_\mathrm{A}+y_\mathrm{B}}{2}\ ;\dfrac{z_\mathrm{A}+z_\mathrm{B}}{2}\right)$.

P : $2x+8y-8z+7=0$

Solution détaillée :

A(1 ; 2 ; – 1)   B(2 ; 1 ; 0)

1^ère^ méthode :

P est le plan perpendiculaire à (AB) passant par le milieu I de [AB].

$$\mathrm{I}\left|\begin{array}{l} x_\mathrm{I}=\dfrac{x_\mathrm{A}+x_\mathrm{B}}{2}=\dfrac{1}{2}\\ y_\mathrm{I}=\dfrac{y_\mathrm{A}+y_\mathrm{B}}{2}=0\\ z_\mathrm{I}=\dfrac{z_\mathrm{A}+z_\mathrm{B}}{2}=1\end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\left|\begin{array}{l}-1\\-4\\4\end{array}\right.$$

$P\perp$ (AB) donc le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est un vecteur normal à P.

Par conséquent, P admet une équation cartésienne de la forme $-x-4y+4z+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$.

$\mathrm{I}\in P$ donc $-x_\mathrm{I}-4y_\mathrm{I}+4z_\mathrm{I}+d=0$ soit $-\dfrac{1}{2}+4+d=0$ d'où $d=-\dfrac{7}{2}$.

P admet donc pour équation cartésienne $-x-4y+4z-\dfrac{7}{2}=0$.

En multipliant les deux membres de l'équation par – 2, on en déduit que P a pour équation cartésienne $2x+8y-8z+7=0$.

2^e^ méthode :

Soit M(x, y, z) un point quelconque de l'espace.

$\mathrm{M}\in P \Leftrightarrow \mathrm{MA}=\mathrm{MB}$

$\Leftrightarrow \mathrm{AM}=\mathrm{BM}$

$\Leftrightarrow \mathrm{AM}^2=\mathrm{BM}^2$

$\Leftrightarrow (x-x_\mathrm{A})^2+(y-y_\mathrm{A})^2+(z-z_\mathrm{A})^2=(x-x_\mathrm{B})^2+(y-y_\mathrm{B})^2+(z-z_\mathrm{B})^2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=(x-0)^2+(y+2)^2+(z-3)^2$

$\Leftrightarrow 2x+8y-8z+7=0$

Autre version :

$\mathrm{M}\in P \Leftrightarrow \mathrm{MA}=\mathrm{MB}$

$\Leftrightarrow \mathrm{MA}^2=\mathrm{MB}^2$

$\Leftrightarrow (x_\mathrm{A}-x)^2+(y_\mathrm{A}-y)^2+(z_\mathrm{A}-z)^2=(x_\mathrm{B}-x)^2+(y_\mathrm{B}-y)^2+(z_\mathrm{B}-z)^2$

$\Leftrightarrow (1-x)^2+(2-y)^2+(1+z)^2=(-x)^2+(-2-y)^2+(3-z)^2$

$\Leftrightarrow -2x-8y+8z-7=0$

16 Équation d'une sphère définie par un diamètre

Les deux méthodes donnent une équation cartésienne de $\mathcal{S}$: $x^2+y^2+z^2-y-4z=0$.

Solution détaillée :

A(2 ; 1 ; 2)   B(– 2 ; 0 ; 2)

$\mathcal{S}$: sphère de diamètre [AB]

1^ère^ méthode :

Soit $\mathrm{M}(x\ ;y\ ;z)$ un point quelconque de l'espace.

$\mathrm{M}\in\mathcal{S} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}}=0$

$\Leftrightarrow x_{\overrightarrow{\mathrm{MA}}}\times x_{\overrightarrow{\mathrm{MB}}}+y_{\overrightarrow{\mathrm{MA}}}\times y_{\overrightarrow{\mathrm{MB}}}+z_{\overrightarrow{\mathrm{MA}}}\times z_{\overrightarrow{\mathrm{MB}}}=0$

$\Leftrightarrow (2-x)(-2-x)+(1-y)(0-y)+(2-z)(2-z)=0$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-y-4z=0$

Une équation cartésienne de $\mathcal{S}$ s'écrit : $x^2+y^2+z^2-y-4z=0$.

2e méthode : en utilisant le centre et le rayon de $\mathcal{S}$

On calcule la distance AB.

$$\begin{aligned}\mathrm{AB} &= \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}\\ &= \sqrt{(-4)^2+(-1)^2+0^2}\\ &= \sqrt{17}\end{aligned}$$

On calcule les coordonnées du milieu I de [AB].

$$\mathrm{I}\left|\begin{array}{l} x_I=\dfrac{x_A+x_B}{2}=0\\ y_I=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{1}{2}\\ z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}=2\end{array}\right.$$

S a pour équation $x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2+(z-2)^2=\left(\dfrac{\sqrt{17}}{2}\right)^2$ (1).

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow x^2+y^2-y+\frac{1}{4}+z^2-4z+4=\frac{17}{4}\\ &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-y-4z=0\end{aligned}$$

$\boxed{17}$ On résout le problème à l'aide d'un système.
$t=-2$ et $t'=-1$.

Donc M (–1 ; –4 ; 3) et M' (–2 ; 5 ; 0).

Solution détaillée :

Soit M un point de D associé au paramètre t et M' un point de D' associé au paramètre t'.

I milieu de [MM'] $\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x_M+x_{M'}}{2}=x_I\\ \dfrac{y_M+y_{M'}}{2}=y_I\\ \dfrac{z_M+z_{M'}}{2}=z_I\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x_M+x_{M'}=2x_I\\ y_M+y_{M'}=2y_I\\ z_M+z_{M'}=2z_I\end{cases}$ ou $\begin{cases}\dfrac{1+t+2t'}{2}=-\dfrac{3}{2}\\ \dfrac{2t+3-2t'}{2}=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1-t+1+t'}{2}=\dfrac{3}{2}\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}1+t+2t'=-3\\ 2t+3-2t'=1\\ 1-t+1+t'=3\end{cases}$

On considère le système formé de la 1ère et de la 2e équation.

On le résout (méthode au choix) ; on trouve $\begin{cases}t=-2\\ t'=-1\end{cases}$.

On vérifie que la 3e équation est satisfaite.

Donc M (–1 ; –4 ; 3) et M' (–2 ; 5 ; 0).

Conclusion :

Pour t = – 2, on obtient $\begin{cases}x_M=1-2=-1\\ y_M=2\times(-2)=-4\\ z_M=1-(-2)=3\end{cases}$.

Pour t' = – 1, on obtient $\begin{cases}x_{M'}=2\times(-1)=-2\\ y_{M'}=3-2\times(-1)=5\\ z_{M'}=1-1=0\end{cases}$.

On en déduit que M (– 1 ; – 4 ; 3) et M' (– 2 ; 5 ; 0).

Autre façon de rédiger :

I milieu de [MM'] $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_{\mathrm{M}} + x_{\mathrm{M'}}}{2} = x_{\mathrm{I}} \\ \dfrac{y_{\mathrm{M}} + y_{\mathrm{M'}}}{2} = y_{\mathrm{I}} \\ \dfrac{z_{\mathrm{M}} + z_{\mathrm{M'}}}{2} = z_{\mathrm{I}} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+t+2t' = -3 & (1) \\ 2t+3-2t' = 1 & (2) \\ 1-t+1+t' = 3 & (3) \end{cases}$$

(1) $\Leftrightarrow$ $t = -4 - 2t'$ (1')

Compte tenu de (1'), (2) donne alors $3 + 2(-4 - 2t') - 2t' = 1$ soit $t' = -1$.

L'égalité (1') donne alors $t = 2$.

L'égalité (3) est vérifiée pour $t = 2$ et $t' = -1$.

$\boxed{18}$ $x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z - 1 = 0$

L'ensemble $\mathcal{S}$ est la sphère de centre $\Omega(0\ ;3\ ;-2)$ et de rayon $\sqrt{14}$.

Solution détaillée :

Soit M(x, y, z) un point quelconque de l'espace.

$$\begin{aligned} \mathrm{MA}^2 &= (1-x)^2 + (2-y)^2 + (-1-z)^2 \\ &= x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 + 2z + 6 \end{aligned}$$

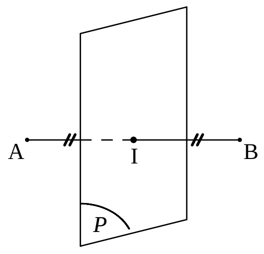
$$\begin{aligned} \mathrm{MB}^2 &= (2-x)^2 + (1-y)^2 + (0-z)^2 \\ &= x^2 - 4x + y^2 - 2y + z^2 + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{M} \in \mathcal{S} &\Leftrightarrow 2\mathrm{MA}^2 - \mathrm{MB}^2 = 8 \\ &\Leftrightarrow 2\left(x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 + 2z + 6\right) - \left(x^2 - 4x + y^2 - 2y + z^2 + 5\right) = 8 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-0)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 - 9 - 4 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-0)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 14 \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{S}$ est la sphère de centre $\Omega(0\ ;3\ ;-2)$ et de rayon $\sqrt{14}$.

$\boxed{19}$ A(0 ; 4 ; 0)

Déterminons une équation du plan médiateur *P* du segment [OA].



On a tout intérêt à faire une figure dans l'espace.

1ère méthode : méthode la plus simple, la plus élégante

Par définition, P est le plan passant par le milieu I de [OA] et orthogonal à la droite (OA).
I(0 ; 2 ; 0)
A $\in$ (Oy) donc la droite (OA) est confondue avec l'axe (Oy).

Donc $P \perp$ (Oy) donc comme le repère est orthonormé, on en déduit que P // (xOz).
Par conséquent, P admet une équation cartésienne de la forme $y = a$.
Comme I $\in P$, P admet donc pour équation cartésienne $y = 2$.

2e méthode : plus maladroite ici

On note I le milieu de [OA].

Calculons les coordonnées de I.

$$\mathrm{I} \left| \begin{array}{l} x_{\mathrm{I}} = 0 \\ y_{\mathrm{I}} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ z_{\mathrm{I}} = 0 \end{array} \right.$$

Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$.

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \left| \begin{array}{l} 0 \\ 4 \\ 0 \end{array} \right.$$

Soit M(x ; y ; z) un point quelconque de l'espace.

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} \in P &\Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{IM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0 \\
&\Leftrightarrow 0 \times (x-0) + 4 \times (y-2) + 0 \times (z-0) = 0 \\
&\Leftrightarrow 4 \times (y-2) = 0 \\
&\Leftrightarrow y-2 = 0 \\
&\Leftrightarrow y = 2
\end{aligned}$$

3e méthode : plus maladroit ici

Soit M(x ; y ; z) un point quelconque de l'espace.

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} \in P &\Leftrightarrow \mathrm{MO}^2 = \mathrm{MA}^2 \\
&\Leftrightarrow \ldots \\
&\Leftrightarrow \ldots \\
&\Leftrightarrow \ldots \\
&\Leftrightarrow \ldots
\end{aligned}$$

$\boxed{20}$ E_1 : $x-2y+3z-5 \geq 0$

• **Déterminons si le point A(1 ; 1 ; 1) appartient à E_1.**

$1-2\times1+3\times1-5=-3$ donc A $\notin E_1$.

• **Déterminons si le point B(0 ; – 4 ; 1) appartient à E_1.**

$0-2\times(-4)+3\times1-5=6$ donc B $\in E_1$.

• **Déterminons si le point C(2 ; 2 ; – 3) appartient à E_1.**

$2-2\times2+3\times(-3)-5=-16$ donc C $\notin E_1$.

• **Déterminons si le point D(– 3 ; 0 ; 2) appartient à E_1.**

$-3-2\times0+3\times2-5=-2$ donc D $\notin E_1$.

Autre façon de rédiger pour le point A :

On a : $x_{\mathrm{A}}-2y_{\mathrm{A}}+3z_{\mathrm{A}}-5=1-2\times1+3\times1-5=-3$

Donc $x_{\mathrm{A}}-2y_{\mathrm{A}}+3z_{\mathrm{A}}-5<0$.

Par suite, A $\notin E_1$.

$\boxed{21}$ On a : $2x_{\mathrm{A}}-y_{\mathrm{A}}-z_{\mathrm{A}}+6=2\times(-2)-4-2+6=-4$.

$2x_{\mathrm{A}}-y_{\mathrm{A}}-z_{\mathrm{A}}+6<0$ donc le demi-espace ouvert E_1 est défini par l'inéquation $2x-y-z+6<0$.