1ère S

Les variables aléatoires

I. Exemple

1°) Expérience aléatoire

On lance un dé non truqué.
On note le numéro de la face supérieure.

2°) Règle du jeu

- Si le numéro obtenu est égal à 1, on gagne 12 €.
- Si le numéro obtenu est égal à 2, on perd 6 €.
- Si le numéro obtenu est égal à 3, 4, 5 ou 6, on ne gagne ni ne perd rien.

3°) Notations

On note X le gain algébrique du joueur en €.
X est un nombre réel qui peut prendre les 3 valeurs :

$x_1 = 12$
$x_2 = -6$
$x_3 = 0$

4°) Calculs de probabilités

Loi d'équiprobabilité P.

On pose les calculs.

$$\begin{aligned} P(X = x_1) &= P(X = 12) \\ &= P(\text{"obtenir le numéro 1"}) \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = x_2) &= P(X = -6) \\ &= P(\text{"obtenir le numéro 2"}) \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

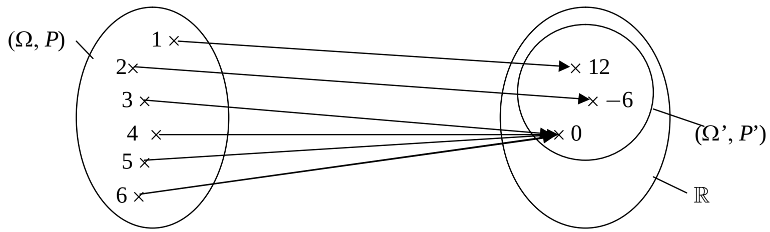
$$\begin{aligned} P(X = x_3) &= P(X = 0) \\ &= P(\text{"obtenir le numéro 3, 4, 5 ou 6"}) \\ &= \frac{4}{6} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Tableau

x_i	12	-6	0	
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	Total =1

5°) Interprétation

Ce tableau définit une loi de probabilité P' sur l'ensemble $\Omega' = \{12\,;-6\,;0\}$ appelée **« loi de probabilité »** de X.



II. Définition. Vocabulaire. Conséquence

1°) Définition

> (Ω, P) est un espace probabilisé.
> Une **variable aléatoire réelle** est une fonction X définie sur l'univers Ω qui à chaque résultat possible associe un réel.

$X : \Omega \to \mathbb{R}$.

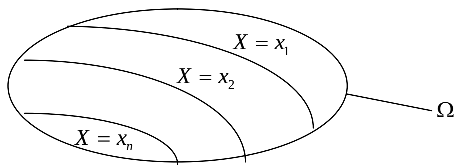
2°) Remarque importante

Attention
Dans ce chapitre, nous ne nous intéresserons qu'aux variables aléatoires prenant un nombre fini de valeurs $x_1, x_2 \ldots x_n$ (**« variables aléatoires discrètes »**).

3°) Evénements élémentaires associés

Pour chaque valeur x_i, l'événement E_i : « X prend la valeur x_i » est notée $(X = x_i)$ (**événement élémentaire associé à x_i**).

4°) Propriété



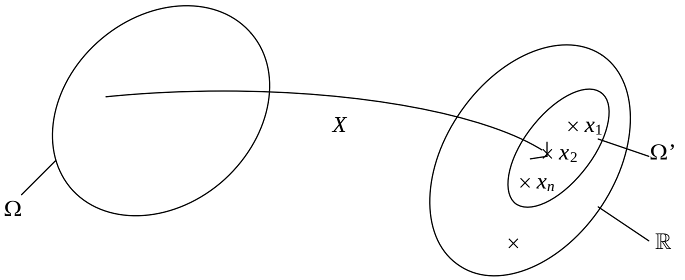
Les événements $(X = x_1)$, $(X = x_2)$…. constituent un système complet d'événements de Ω.

III. <u>Loi de probabilité</u>

1°) Définition

En associant à chaque valeur x_i, la probabilité $p'_i = P(X = x_i)$, on définit une **loi de probabilité** *P'* sur l'ensemble $\Omega' = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ des valeurs prises par *X*.

Schéma



2°) Présentation

Valeurs possibles de *X*	x_1	x_2	…	x_n	
Probabilités $p'_i = P(X = x_i)$	p'_1	p'_2		p'_n	Total=1

3°) Justification

● $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$ $0 \leq p'_i \leq 1$

● Les événements $(X = x_1)$, $(X = x_2)$,…,$(X = x_n)$ forment un système complet d'événements de Ω donc la somme de leurs probabilités est égale à $P(\Omega) = 1$ soit $p'_1 + p'_2 + ... + p'_n = 1$.

4°) Notation

Cette loi de probabilité est notée *P'* ou plutôt $\boldsymbol{P_X}$ (**loi de probabilité de la variable aléatoire *X*** ou **loi image de *P* par *X***).

5°) Méthode pour déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire *X*

● On détermine l'ensemble des valeurs prises par *X*.
Phrase de rédaction-type :
« *X* prend les valeurs $x_1 = ...$, $x_2 = ...$, … ».

● On pose les calculs
$P(X = x_1) = ...$
$P(X = x_2) = ...$

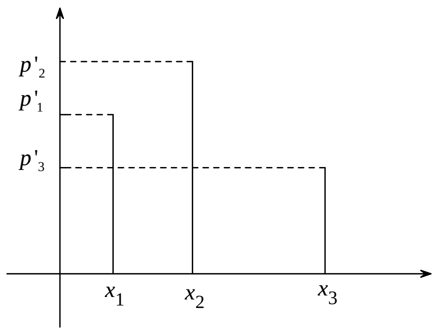
Préciser s'il y a équiprobabilité avant.

● On remplit un tableau (avec les valeurs)

$\boldsymbol{x_i}$			…		
$\boldsymbol{P(X = x_i)}$					Total=1

6°) Représentation graphique (parfois utilisée)

Diagramme en bâtons : on suppose que les valeurs sont rangées dans l'ordre croissant.



Ce diagramme permet de visualiser la loi de probabilité.

IV. <u>Indicateurs d'une variable aléatoire discrète</u>

(Mêmes notations qu'au III)

1°) Espérance mathématique

$$\boxed{\boldsymbol{E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i \times P(X = x_i)}} \text{ ou } E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} \left(x_i \times P(X = x_i)\right)$$

(On peut repasser en rouge les *i* en indice et dans la somme).

2°) Variance

$$\boxed{\boldsymbol{V(X) = \sum_{i=1}^{i=n} \left(x_i - E(X)\right)^2 \times P(X = x_i)}}$$

$V(X) \geq 0$

3°) Ecart-type

$$\boxed{\sigma(X)=\sqrt{V(X)}}$$

4°) Formule de Kœnig-Huygens (démontrée au V)

$$\boxed{V(X)=\left(\sum_{i=1}^{i=n}(x_i)^2\times P(X=x_i)\right)-\left[E(X)\right]^2}$$

5°) Exemple (reprise de l'exemple du I)

x_i	12	-6	0	
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	Total =1

Espérance mathématique

$$E(X)=\sum_{i=1}^{i=3}x_i\times P(X=x_i)$$

$$=12\times\frac{1}{6}+(-6)\times\frac{1}{6}+0\times\frac{4}{6}$$
$$=1$$

Lorsque l'on répète l'expérience aléatoire un très grand nombre de fois, le gain moyen est égal à 1 €.

Variance

Avec la définition

$$V(X)=\sum_{i=1}^{i=3}\left(x_i-E(X)\right)^2\times P(X=x_i)$$
$$=(12-1)^2\times\frac{1}{6}+(-6-1)^2\times\frac{1}{6}+(0-1)^2\times\frac{4}{6}$$
$$=29$$

Avec la formule de Kœnig-Huygens

$$V(X)=\left(\sum_{i=1}^{i=3}(x_i)^2\times P(X=x_i)\right)-\left[E(X)\right]^2$$
$$=12^2\times\frac{1}{6}+(-6)^2\times\frac{1}{6}+0^2\times\frac{1}{6}-1^2$$
$$=29$$

6°) Vocabulaire

Pour un jeu, on note souvent X le **gain algébrique** du joueur.
Lorsque $E(X)=0$, on dit que le jeu est **honnête** ou **équitable**.

7°) Remarque

Pour calculer la variance, il est préférable d'utiliser la formule de Kœnig-Huygens.

V. <u>Appendice : démonstration de la formule de Kœnig-Huygens</u>

x_i	x_1	x_2	…	x_n	
$P(X=x_i)$	p'_1	p'_2		p'_n	Total=1

$$E(X)=\sum_{i=1}^{i=n}x_i\times p'_i \qquad (1)$$

$$V(X)=\sum_{i=1}^{i=n}\left(x_i-E(X)\right)^2\times p'_i \quad (2)$$

Démontrons que : $V(X)=\left(\sum_{i=1}^{i=n}(x_i)^2\times p'_i\right)-\left[E(X)\right]^2$.

(2) donne (identité remarquable) :

$$V(X)=\sum_{i=1}^{i=n}\left(x_i^2-2x_iE(X)+E(X)^2\right)\times p'_i$$

On sépare la somme en 3 sommes.

$$V(X)=\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{i=n}x_i^2\times p'_i\right)}_{S_1}-\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{i=n}2x_i\times p'_i\times E(X)\right)}_{S_2}+\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{i=n}p'_i\times E(X)^2\right)}_{S_3}$$

On ne touche pas à S_1.
En revanche, dans S_2, on sort 2 et E(X) qui sont des constantes.
Quant à S_3, on sort $E(X)^2$ qui est une constante.

$$V(X)=\left(\sum_{i=1}^{i=n}x_i^2\times p'_i\right)-2E(X)\times\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{i=n}x_i\times p'_i\right)}_{E(X)}+E(X)^2\times\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{i=n}p'_i\right)}_{1}$$

$$V(X)=\left(\sum_{i=1}^{i=n}x_i^2\times p'_i\right)-2E(X)^2+E(X)^2$$

$$V(X)=\left(\sum_{i=1}^{i=n}x_i^2\times p'_i\right)-E(X)^2$$