1$^{\text{ère}}$ S

Probabilités

I. Exemples introductifs

1°) Exemple 1

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer une pièce non truquée.
On note le côté qu'elle présente.

On dira que la probabilité d'obtenir pile est égale à $\frac{1}{2}$.

On dira que la probabilité d'obtenir face est égale à $\frac{1}{2}$.

L'expérience aléatoire est modélisée par une loi de probabilité *P* donnée dans le tableau.

Résultat	**Pile**	**Face**	
Probabilité	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	**Total** $=1$

2°) Exemple 2

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer une pièce truquée telle qu'il y ait une chance sur 4 qu'elle présente le côté pile.
On note le côté qu'elle présente.

On dira que la probabilité d'obtenir pile est égale à $\frac{1}{4}$.

On dira que la probabilité d'obtenir face est égale à $\frac{3}{4}$.

L'expérience aléatoire est modélisée par une loi de probabilité *P* donnée dans le tableau.

Résultat	**Pile**	**Face**	
Probabilité	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	**Total** $=1$

II. Loi de probabilité

1°) Définition

On définit une **loi de probabilité** sur l'ensemble des résultats e_1, e_2, …, e_n d'une expérience aléatoire en leur attribuant des nombres fixes p_1, p_2, …, p_n vérifiant les deux conditions suivantes :

C$_1$: pour tout entier $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $0 \leq p_i \leq 1$

C$_2$: $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$

2°) Tableau

Résultats	e_1	e_2		e_n	
Probabilités	p_1	p_2		p_n	**Total** $=1$

3°) Notation

On note *P* la loi de probabilité.
On écrira $P(e_1) = p_1$ (probabilité du résultat e_1), $P(e_2) = p_2$ (probabilité du résultat e_2)...
On dira que l'expérience aléatoire est **modélisée** par la loi de probabilité *P*.

4°) Interprétation

p_i est un nombre compris entre 0 et l qui mesure la chance que le résultat e_i a de se réaliser.

III. Probabilité d'un événement

1°) Exemple

On lance un dé cubique truqué.
On note le numéro de la face supérieure.
On suppose que l'expérience aléatoire est modélisée par la loi de probabilité *P* ci-dessous.

Résultat	1	2	3	4	5	6	
Probabilité	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,5	Total = 1

On considère l'événement A : « obtenir un numéro pair ».

Attention à l'orthographe du mot *événement*, il y a bien deux accents aigus contrairement à ce que laisserait supposer la prononciation usuelle ; il s'agit d'une anomalie due à une erreur de typographie commise au XVII$^{\text{e}}$ siècle.

$P(\text{A}) = P(2) + P(4) + P(6)$

$\boxed{P(\text{A}) = 0,7}$

2°) Définition

La probabilité d'un événement A est donnée par la formule
$P(\text{A})$ = somme des probabilités des résultats qui constituent A.

3°) Interprétation

$P(\text{A})$ est un nombre compris entre 0 et 1 qui mesure la chance que l'événement A a de se réaliser.

IV. Cas d'équiprobabilité

1°) Définition

On dit que l'on est dans un **cas d'équiprobabilité** lorsque tous les résultats possibles pour l'expérience aléatoire ont la même probabilité.

2°) Tableau

Résultats	e_1	e_2		e_n	
Probabilités	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$		$\frac{1}{n}$	**Total** $=1$

n : nombre de résultats possibles

3°) Vocabulaire

On dit que la loi de probabilité P qui modélise l'expérience aléatoire est une **loi d'équiprobabilité** ou une **loi équirépartie**.

4°) Probabilité d'un événement (Formule de Laplace)

<u>Dans le cas de l'équiprobabilité</u>, la probabilité d'un événement A est donnée par la formule

$$\boldsymbol{P(\mathrm{A}) = \dfrac{\text{nombre de résultats possibles pour A}}{\text{nombre de résultats possibles pour l'expérience aléatoire}}}$$

5°) Démonstration

On note k le nombre de résultats possibles pour A.
On a vu que : $P(\mathrm{A}) = \text{somme des probabilités des résultats qui constituent A}$

Donc $P(\mathrm{A}) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} + ... + \dfrac{1}{n}$ (k termes)

$P(\mathrm{A}) = k \times \dfrac{1}{n}$

$P(\mathrm{A}) = \dfrac{k}{n}$

$$\boxed{P(\mathrm{A}) = \dfrac{\text{nombre de résultats possibles pour A}}{\text{nombre de résultats possibles pour l'expérience aléatoire}}}$$

6°) Exercice-type (avec rédaction)

Une urne contient 3 boules rouges R_1, R_2, R_3
et 2 boules noires N_1 et N_2.

On tire une boule au hasard.
On note la couleur de la boule tirée.
On considère l'événement A : « obtenir une boule rouge ».
Calculer la probabilité de A.

Le tirage étant effectué au hasard, on peut adopter le modèle d'équiprobabilité, c'est-à-dire que l'on modélise l'expérience aléatoire par une loi d'équiprobabilité P.
Le nombre de résultats possibles pour l'expérience aléatoire est égal à 5.
Le nombre de résultats possibles pour A est égal à 3.

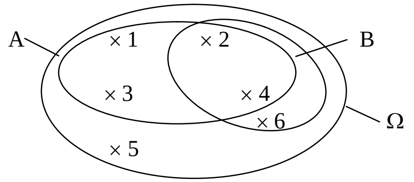
D'après **la formule de Laplace**, $\boxed{P(\mathrm{A}) = \dfrac{3}{5}}$.

V. <u>Vocabulaire des événements</u>

1°) Exemple

On lance un dé cubique.
On considère les événements
A : « obtenir un numéro inférieur ou égal à 4 »
B : « obtenir un numéro pair »
C : « obtenir un numéro inférieur ou égal à 6 »
D : « obtenir un numéro strictement supérieur à 6 ».
On note Ω l'ensemble de tous les résultats possibles pour l'expérience (**univers des possibles**).

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$\mathrm{A} = \{1, 2, 3, 4\}$
$\mathrm{B} = \{2, 4, 6\}$
$\mathrm{C} = \Omega$
$\mathrm{D} = \varnothing$



2°) Définition de l'univers des possibles

Ensemble de tous les résultats possibles pour l'expérience aléatoire : $\Omega = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$

3°) Définition d'un événement quelconque

Un **événement** est une **partie** ou un **sous-ensemble** de Ω.

4°) Définitions d'événements particuliers

- **événement certain : Ω**
- **événement impossible : $\varnothing$**
- **événement élémentaire : événement constitué d'un seul résultat (singleton)**

5°) Réunion et intersection de 2 événements

$\mathbf{A \cap B}$: intersection de A et B (événement constitué des résultats possibles pour A **<u>et</u>** B)
$\mathbf{A \cup B}$: réunion de A et B (événement constitué des résultats possibles pour A **<u>ou</u>** B (ou inclusif))

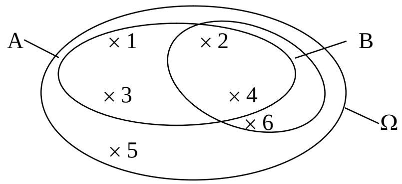
N.B. :

$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{B} \cap \mathrm{A}$ et $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{B} \cup \mathrm{A}$.

6°) Exemple

Hypothèses du 1°).

A : « obtenir un numéro inférieur ou égal à 4 »
B : « obtenir un numéro pair »



$A \cap B$: « obtenir un numéro inférieur ou égal à 4 $\boxed{\textbf{et}}$ pair »

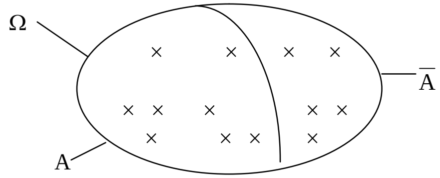
$A \cap B = \{2, 4\}$

$A \cup B$: « obtenir un numéro inférieur ou égal à 4 $\boxed{\textbf{ou}}$ pair »

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

7°) Evénement contraire

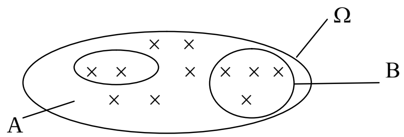
$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{\Omega} \setminus \mathbf{A}$ **(** Ω privé de A ou **complémentaire** de A dans Ω **)**



$\overline{A}$: événement constitué de tous les résultats qui n'appartiennent pas à A

8°) Evénements incompatibles

On dit que deux événements A et B sont **incompatibles** pour exprimer que $\mathbf{A \cap B = \varnothing}$ (aucun résultat commun).



Exemple :

Un événement et son contraire.

5°) Lois de Morgan

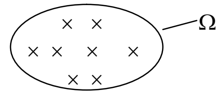
A et B sont deux événements quelconques. $\overline{\mathbf{A \cap B}} = \overline{\mathbf{A}} \cup \overline{\mathbf{B}}$ $\overline{\mathbf{A \cup B}} = \overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{B}}$

Rappel : la barre veut dire contraire.

VI. Propriétés des probabilités
(Les démonstrations sont quasiment évidentes)

(Ω, P) est un espace probabilisé.

1°) Propriété 1 (probabilité de l'événement certain)

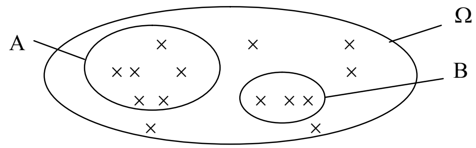


$\boxed{\boldsymbol{P(\Omega) = 1}}$

2°) Propriété 2 (probabilité de l'événement impossible)

$\boxed{\boldsymbol{P(\varnothing) = 0}}$

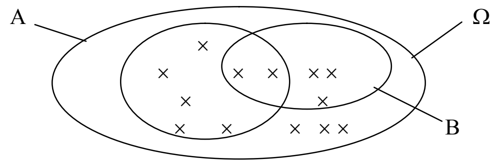
3°) Propriété 3 (probabilité de la réunion de 2 événements incompatibles)



A et B sont 2 événements incompatibles $\mathbf{(A \cap B = \varnothing)}$ $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$

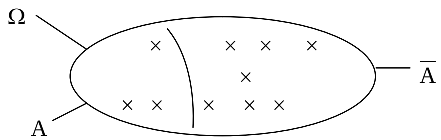
4°) Propriété 4 (probabilité de la réunion de 2 événements)

A et B sont 2 événements quelconques de Ω. $\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$



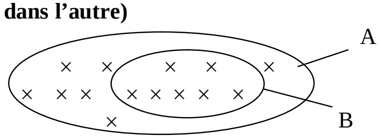
5°) Propriété 5 (probabilité d'un événement contraire)

A est un événement quelconque de Ω. $\boldsymbol{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$



6°) Propriété 6 (probabilités d'événements inclus l'un dans l'autre)

Si $\mathbf{A \subset B}$, alors $\boldsymbol{P(A) \leq P(B)}$. **De plus, on a : $\boldsymbol{P(B \setminus A) = P(B) - P(A)}$.**



VII. Probabilités et statistiques ; simulations d'expériences aléatoires

Lien entre probabilités et statistiques.

simuler = faire comme si

Intérêt d'une simulation d'expérience aléatoire : donner une idée d'un résultat permettant d'amorcer une modélisation.

Simulations sur ordinateur ou sur calculatrice (voir exercices).

Comment modéliser le hasard ?

Un exemple

Une urne contient :
- 3 boules R ;
- 2 boules N.

On tire successivement deux boules avec remise.

Il y a 4 types de tirages possibles :

N-N // R-N // N-R // R-R

$\frac{1}{4}$ $\quad$ $\frac{1}{4}$ $\quad$ $\frac{1}{4}$ $\quad$ $\frac{1}{4}$

Néanmoins on ne peut pas dire que la probabilité de chacun de ces tirages est égale à $\frac{1}{4}$.

Ce serait contraire à l'expérience.

Ce chapitre est l'occasion de revenir sur la **logique mathématique**.

Logique mathématique ≠ logique de tous les jours.
En mathématiques, on a une logique binaire : un énoncé est toujours soit vrai soit faux (pas de demi-mesure).

En mathématiques, les mots ont leur sens fort : « tout » signifie pour tout, sans exception.

Evénement contraire et négation d'une proposition

Exemples simples :

« Personne ne m'écoute ».

Contraire de cette proposition ?

« Au moins une personne m'écoute. »

« Tout le monde parle. »

Contraire de cette proposition ?

« Au moins une personne ne parle pas. »

Rôle du contre-exemple pour démontrer qu'une proposition universelle est fausse.

Point-méthode

1 Retour sur réunion et intersection

Exemples sur la droite réelle

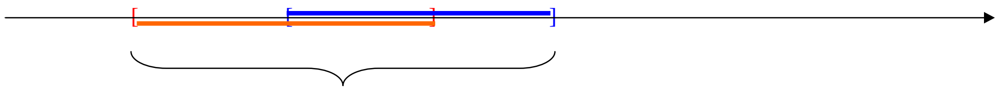
a) Intersection

L'intersection est constituée des éléments communs aux deux.

« L'intersection c'est ce qu'il y a en commun ».

Intersection : rouge et bleu.

b) Réunion



La réunion est constituée des éléments qui appartiennent soit à l'un soit à l'autre, soit aux deux à la fois.

« La réunion c'est la somme des deux. »

Réunion : rouge ou bleu ou les deux.

2 Point-méthode pour chercher la probabilité de l'intersection de deux événements

⚠ Il n'y a pas de formule à appliquer

Pour chercher la probabilité d'une intersection, on cherche les résultats qui vérifient la condition des deux événements.

3 Point-méthode pour chercher la probabilité de la réunion de deux événements

On utilise la formule