$1^{\text{ère}}$ S

Limites de suites (2)

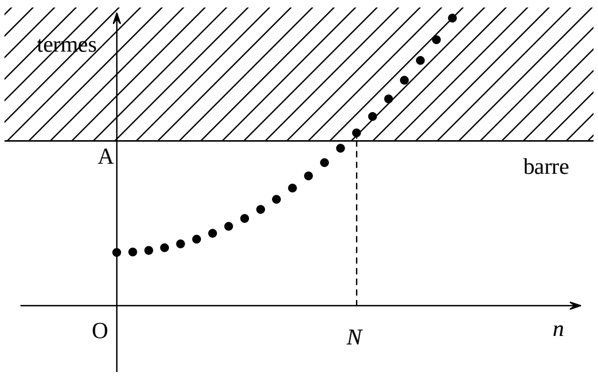
Objectifs : mettre en place et utiliser des définitions rigoureuses des limites de suites.

I. Approche de la définition d'une suite divergeant vers + ∞

1°) Approche graphique

(comprendre l'histoire de la barre)

Graphiquement, comment est représentée une suite (u_n) une suite qui tend vers $+\infty$?

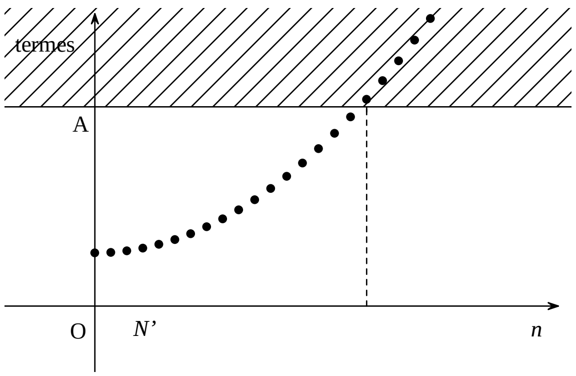


« u_n prend des valeurs aussi grandes que l'on veut pourvu que n soit assez grand »

① Si on place une **barre** à une valeur A (exemple : $\text{A} = 2009$)

Il existe un **palier** (valeur seuil) tel que :
si $n \geq N$, alors $u_n \geq \text{A}$ ($\Leftrightarrow u_n \in [\text{A} ; +\infty[$)

② Si je déplace la barre
(bien montrer qu'on peut déplacer la barre)



N change car ça tend vers +∞.
(Si on bouge l'un, on bouge l'autre.)

2°) Approche numérique (étude d'un exemple avec des chiffres)

$u_n = n^2$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

$u_n \geq 2008$ pour $n \geq \sqrt{2008}$ (visualisation graphique)

$\sqrt{2008} = 44{,}8107713...$

Donc si $n \geq 45$, alors $u_n \geq 2008$.

3°) Une image pour comprendre

Si on place un capital de 1 € sur un compte en banque à un taux non nul et que l'on vit éternellement, un jour on deviendra millionnaire, milliardaire etc.
Il faudra peut-être attendre 10 000 ans, 100 000 ans…

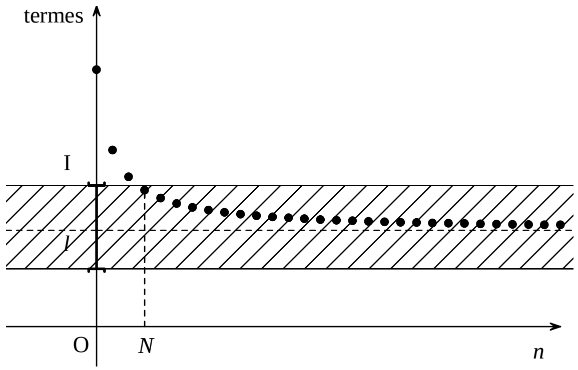
II. Approche de la définition d'une suite qui converge

1°) Approche graphique

(comprendre l'histoire du tuyau)

Graphiquement, comment est représentée une suite (u_n) qui tend vers l ?

u_n se rapproche de l sans forcément être égal à l (notion de « tendre vers »).



palier
$1^{\text{ère}}$ valeur de n à partir duquel la « courbe » passe dans le tuyau

« (u_n) prend des valeurs aussi proches de l que l'on veut pourvu que n soit assez grand »

① Si on place un tuyau ↔ un intervalle ouvert I contenant l
Il existe un pallier N / si $n \geq N$ alors $u_n \in \text{I}$.

Les valeurs ne sortent plus.
On veut enfermer les valeurs dans un « tube », dans un « tuyau » à partir d'un certain indice d'où ils ne sortent plus.

② Si on rétrécit le tuyau ↔ on prend un intervalle ouvert $\text{I}' \subset \text{I}$ contenant l, N change

2°) Approche numérique (étude d'un exemple avec des chiffres)

$u_n = \frac{1}{n}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

$\mathrm{I} = \left]-0{,}01\,;\,0{,}01\right[$ (intervalle ouvert qui contient 0)

Si $n > 100$, alors $u_n \in \mathrm{I}$.

le palier

3°) Une image pour illustrer

Le capital d'une personne diminue de 1% par an.

III. <u>Définitions</u>

1°) Définitions des limites au programme **à savoir par cœur**
à savoir expliquer avec des mots

(u_n) est une suite.

	Définition mathématique sous forme de phrase quantifiée
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$	On dit que la limite de (u_n) est égale à $+\infty$ pour exprimer que <u>tout</u> intervalle I de la forme $[\mathrm{A}\,;+\infty[$ $(\mathrm{A} \in \mathbb{R})$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain indice.
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$	On dit que la limite de (u_n) est égale à $-\infty$ pour exprimer que <u>tout</u> intervalle I de la forme $]-\infty\,;\mathrm{A}]$ $(\mathrm{A} \in \mathbb{R})$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain indice.
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ $(l \in \mathbb{R})$	On dit que la limite de (u_n) est égale à l pour exprimer que <u>tout</u> intervalle **<u>ouvert</u>** I contenant l contient tous les termes u_n à partir d'un certain indice.

Définitions

Une définition ça se comprend mais ça ne se discute pas !
Une définition c'est posé par des mathématiciens.
Une définition ça peut être plus ou moins clair.

2°) Définition d'une suite convergente – d'une suite divergente

Suite convergente	Suite qui admet une limite finie
Suite divergente	Suite qui n'admet pas une limite finie

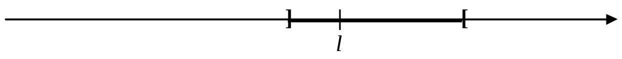
Emploi du vocabulaire

- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$, alors on dit que la suite (u_n) **converge** vers l.
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors on dit que la suite (u_n) **diverge** vers $+\infty$.
- Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$, alors on dit que la suite (u_n) **diverge** vers $-\infty$.

3°) Intervalles et suites

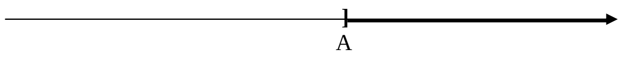
Utilisation de la représentation des termes sur un axe.

• Cas d'une suite convergente vers un réel *l*



Intervalle que l'on rétrécit autour de *l*.

• Cas d'une suite divergente vers +∞



Intervalle dont la borne de gauche A devient de plus en plus grande.

IV. <u>Utilisation des définitions</u>

Définitions D_1, D_2, D_3

Démontrer qu'une suite tend vers $+\infty$, $-\infty$ ou un réel. (théoriquement)

Démontrer qu'une suite ne tend pas vers $+\infty$, $-\infty$ ou un réel.

Démontrer l'unicité de la limite d'une suite.

Démontrer des propriétés des suites (cette année, pour nous, le théorème des gendarmes).

V. <u>Autre définition équivalente pour les suites convergentes</u>

1°) Approche intuitive
Autre point de vue (plus naturel)

Quelles est la signification de $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$?

u_n se rapproche de l sans pour autant être égal à l quand n prend des valeurs de plus en plus grandes.

$d(u_n\,;l)$ devient très petite

aussi petite que l'on veut pour n assez grand

Traduction mathématique :

Cette distance devient < 0,1 à partir d'un certain indice
<0,01 à partir d'un certain indice
<0,001 à partir d'un certain indice

2°) Définition (HP)

$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$

Phrase quantifiée
« Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que si $n \geq N$ alors $d(u_n\,;l) < \varepsilon$. »

3°) Rappels sur la valeur absolue

- **Distance de 2 réels** (définition)

$d(x\,;y) = |x-y| = |y-x|$

(**Exemple :** $d(u_n\,;l) = |u_n - l|$)

- $|x-a| < \varepsilon \iff a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$

(**Exemple :** $|u_n - l| < \varepsilon \iff l-\varepsilon < u_n < l+\varepsilon$)
ε varie → u_n se rapproche de l
Plus ε est petit, plus u_n est proche de l.

4°) Utilisation

- Nous n'utiliserons pas cette définition cette année.
- Mais cette définition permet de démontrer dans le supérieur des propriétés des limites avec les propriétés des inégalités (majorer, minorer) et des valeurs absolues

VI. Limites et comparaisons

1°) Théorème des gendarmes ou d'encadrement

***u*, *v*, *w* sont trois suites telles que :**

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq v_n \leq w_n$

les « gendarmes »

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \quad (l \in \mathbb{R})$

$\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$

Dans ce cas, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.

2°) Démonstration (ROC)

Hypothèses

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq v_n \leq w_n$ (H_1)

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ (H_2)

$\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$ (H_3)

But : démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.

Démonstration avec la définition

On choisit un intervalle ouvert I contenant l (I est un intervalle sur l'axe des ordonnées).

D'après (H_2), comme I est un intervalle ouvert contenant l, on peut trouver un entier naturel N_1 tel que si $n \geq N_1$, alors $u_n \in \mathrm{I}$.
(N_1 est un indice à partir duquel tous les termes de la suite u sont dans I)

D'après (H_3), comme I est un intervalle ouvert contenant l, on peut trouver un entier naturel N_2 tel que si $n \geq N_2$, alors $w_n \in \mathrm{I}$.

On note N le plus grand des entiers N_1 et N_2.

(Exemple :

$N_1 = 1000$, $N_2 = 1500$
Comme N_1 est un indice à partir duquel tous les termes de la suite u sont dans I, on peut dire que u_{1000}, u_{1001}, u_{1002} … sont dans I.

Comme N_2 est un indice à partir duquel tous les termes de la suite w sont dans I, on peut dire que w_{1500}, w_{1501}, w_{1502} … sont dans I.)

Si $n \geq N$, alors $u_n \in \mathrm{I}$ et $w_n \in \mathrm{I}$.

Or $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq v_n \leq w_n$ donc si $n \geq N$, alors $v_n \in \mathrm{I}$.
Comme ceci est vrai pour tout intervalle ouvert I contenant *l*, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l$.

3°) Extension du théorème des gendarmes ou « théorème d'un seul gendarme » (admis sans démonstration)

u et v sont deux suites.

• Si $\left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq v_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty \end{array}\right\}$ **alors** $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

(« être plus grand que +∞ »)

• Si $\left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq v_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty \end{array}\right\}$ **alors** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

(« être moins grand que –∞ »)

4°) Exemple

v est la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = \dfrac{2+\sin n}{n}$.

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

Analyse

$\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$

$\sin n$ n'admet pas de limite quand $n \to +\infty$.

On ne peut donc pas déterminer la suite en utilisant la règle sur la limite du quotient de deux suites.

Méthode

On procède par encadrement.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$-1 \leq \sin n \leq 1$$
$$1 \leq 2+\sin n \leq 3 \qquad +2$$
$$\underbrace{\frac{1}{n}}_{u_n} \leq \frac{2+\sin n}{n} \leq \underbrace{\frac{3}{n}}_{w_n} \qquad : n \ (n>0)$$

On pose $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $w_n = \dfrac{3}{n}$.

$\left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq v_n \leq w_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0 \end{array}\right\}$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

5°) Point-méthode

- Une nouvelle manière de trouver la limite d'une suite
- Penser aux théorèmes de comparaison quand on a des cosinus, des sinus, $(-1)^n$.
- Il existe une version du théorème des gendarmes et de son extension pour les fonctions.

VII. Démonstration de la limite q^n lorsque *n* tend vers + ∞ (*q* réel fixé)

1°) Examen des cas particuliers

• $\underline{q=0}$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad q^n = 0$.

(**N.B. :** on prend *n* dans $\mathbb{N}^*$ car 0^0 n'existe pas.)

La suite (q^n) est constante donc elle est convergente ($\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$).

• $\underline{q=1}$

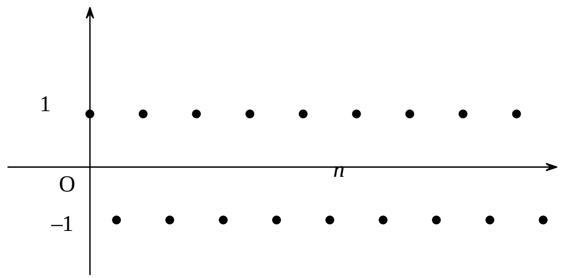
$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad q^n = 1$.

La suite (q^n) est constante donc elle est convergente ($\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$).

• $\underline{q=-1}$

$$q^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

La suite (q^n) n'a pas de limite donc elle est divergente.



(Une suite ne peut admettre deux limites.)

2°) Cas général

• $\underline{q > 1}$

On cherche $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$.

Astuce de départ :

On pose $q = 1 - h$.

On a : $h > 0$ et $q = 1 + h$.

$$q^n = (1+h)^n = \underbrace{(1+h)(1+h)...(1+h)}_{n \text{ facteurs}} = 1 + nh + \underbrace{...}_{\text{facteurs tous positifs ou nuls}} + h^n$$

On a donc $q^n \geq nh$ car $q^n - nh = 1 + \underbrace{...}_{\text{termes positifs ou nuls}} + h^n$.

$$\left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N} \quad q^n \geq nh \\ \lim\limits_{n \to +\infty} (nh) = +\infty \quad (\text{car } h > 0) \end{array}\right\} \text{ donc d'après l'extension du théorème des gendarmes, } \lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty.$$

• $\underline{0 < |q| < 1}$

($-1 < q < 0$ ou $0 < q < 1$)

Dans ce cas, $\dfrac{1}{|q|} > 1$.

On pose $q' = \dfrac{1}{|q|}$.

$q' > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (q')^n = +\infty$ (cas précédent).

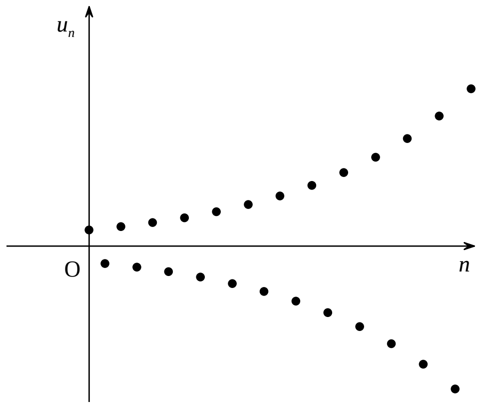
Or $|q^n| = |q|^n = \left(\dfrac{1}{q'}\right)^n = \dfrac{1}{(q')^n}$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} |q^n| = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

• $\underline{q < -1}$

Alors $-q > 1$ soit $|q| > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} |q|^n = +\infty$.
Or q est négatif dons le signe de q^n sera positif ou négatif <u>suivant la parité de *n*</u>.
Les termes sont alternativement positifs ou négatifs, de plus en plus grands en valeur absolue.

La suite (q^n) n'a pas de limite. Elle est divergente.



VIII. <u>Appendice : le paradoxe de Zénon d'Elée</u>

Achille et la tortue
La flèche qui n'atteint jamais sa cible.

1°) Historique

Parménide, philosophe grec du V[e] siècle avant J-C enseignait que « L'être est un, indivisible et immobile ».
Le « non être » = le Néant.

Pour lui, le mouvement n'est qu'une illusion. Cette thèse rencontrait des adversaires.
Zénon (environ 500 avant Jésus-Christ), l'un des disciples de Parménide, a imaginé des paradoxes célèbres pour démontrer l'impossibilité du mouvement.

2°) Le paradoxe de la flèche

Pour atteindre sa cible, une flèche doit d'abord parcourir la moitié du trajet, puis la moitié de la moitié, puis encore la moitié et ceci indéfiniment… Cela permettait à Zénon de conclure que la flèche n'atteint jamais sa cible.

3°) Mathématisation du problème

$$\left(\text{distance} = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...}_{\text{somme qui tend vers 1}}\right)$$

Comme les parts d'un gâteau.

Modélisation du problème à l'aide d'une suite

On note u la suite géométrique de 1[er] terme $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et de raison $q = \dfrac{1}{2}$

$$S_n = \underbrace{u_1 + u_2 + ... + u_n}_{\text{distance parcourue au bout de } n \text{ étapes}} = u_1 \times \frac{1-q^n}{1-q} = 1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1-\frac{1}{2^n}$$

$$S_n < 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ car } -1 < \frac{1}{2} < 1.$$

Donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 1}$

4°) Achille et la tortue

Achille doit rattraper une tortue. Pour cela, il doit arriver à la position où était la tortue initialement mais pendant cet intervalle, la tortue a aussi avancé. C'est pourquoi Achille ne rattrape jamais la tortue.

Les paradoxes de Zénon d'Elée nous font réfléchir sur la notion d'infini.