1$^{\text{ère}}$ S — Limites de suites (1)

Objectif du chapitre : aborder le concept de limite pour les suites.

I. Avant de commencer le chapitre

1°) Etudier la limite d'une suite

Il est important d'abord de rappeler qu'une suite est définie sur $\mathbb{N}$ ou sur une partie de $\mathbb{N}$ (pour les suites définies à partir d'un certain indice).
C'est étudier le comportement de ses termes lorsque l'indice tend vers $+\infty$.

2°) Limite d'une suite c'est forcément quand n tend vers $+\infty$.

On ne peut pas faire tendre n vers $-\infty$.
Mais la limite peut être égale à $-\infty$.

3°) Il va y avoir des ressemblances avec les fonctions mais on va mettre en place un nouveau vocabulaire : **convergence, divergence.**

II. Notion de convergence

1°) Exemple concret

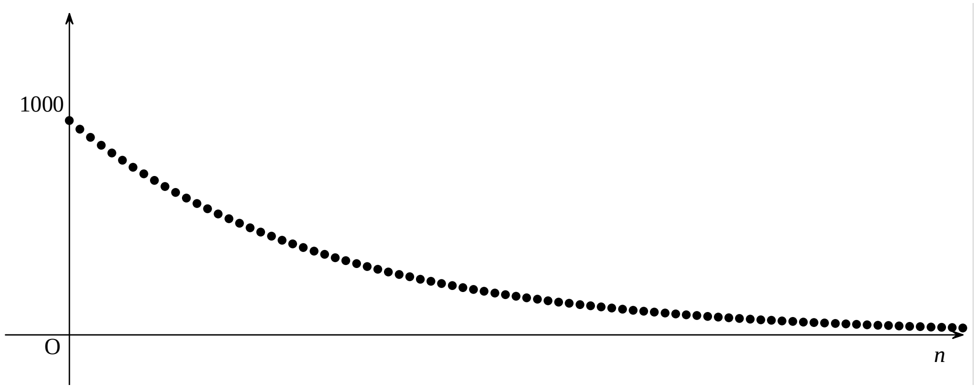
On étudie l'évolution d'une population animale.
Cette population diminue de 4 % par an.
Elle compte initialement 1 000 individus.

2°) Modélisation mathématique

On note p_n la population au bout de n années.

$p_0 = 1000$
$\forall n \in \mathbb{N} \quad p_{n+1} = 0{,}96\,p_n$

Donc la suite (p_n) est une suite géométrique de 1$^{\text{er}}$ terme $p_0 = 1000$ et de raison $q = 0{,}96$.



3°) Interprétation

● Vocabulaire semblable aux fonctions

« p_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ ».
$p_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

« La limite de p_n quand n tend vers $+\infty$ est égale à 0 ».

$\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0$

● Nouveau vocabulaire

« La suite (p_n) **converge** vers 0 ».

III. Notion de divergence

1°) Exemple concret

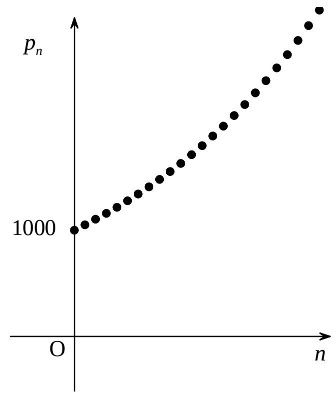
On étudie l'évolution d'une population animale.
Cette population augmente de 10 % par an.
Elle compte initialement 1000 individus.

2°) Modélisation mathématique

On note p_n la population au bout de n années.

$p_0 = 1000$
$\forall n \in \mathbb{N} \quad p_{n+1} = 1{,}1\,p_n$

Donc la suite (p_n) est une suite géométrique de 1$^{\text{er}}$ terme $p_0 = 1000$ et de raison $q = 1{,}1$.



3°) Interprétation

● Vocabulaire semblable aux fonctions

« p_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ ».
$p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

« La limite de p_n quand n tend vers $+\infty$ est égale à $+\infty$ ».
$\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = +\infty$

● Nouveau vocabulaire

« La suite (p_n) **diverge** vers $+\infty$ ».

IV. Premier bilan des notions et vocabulaire

1°) Quelques idées intuitives

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \quad (l\in\mathbb{R})$	**Tous les termes s'accumulent autour de l lorsque $n \to +\infty$.**
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$	**Tous les termes deviennent de plus en plus grands lorsque $n \to +\infty$.**
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$	**Tous les termes deviennent de plus en plus petits lorsque $n \to +\infty$.**

2°) Convergence – divergence

Suite convergente	**Suite qui admet une limite finie.**
Suite divergente	**Suite qui n'admet pas une limite finie.** **2 cas sont alors possibles :** **- soit la suite admet une limite infinie ;** **- soit la suite n'admet pas de limite**

3°) Remarques

Les définitions demandent à être reprises (voir chapitre suivant).

Comme pour les fonctions, on ne met jamais de quantificateur avant une limite (pas de $\forall n$ avant une limite).

4°) Exemples

$u_n = \dfrac{1}{n}$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$	**Convergente**
$u_n = n^2$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$	**Divergente**
$u_n = (-1)^n$	(u_n) n'a pas de limite	**Divergente**

V. Liens entre suites et fonctions

1°) Règle (admises sans démonstration)

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$.
u est la suite définie par $\forall n\in\mathbb{N}$ $\boxed{u_n = f(n)}$ (formule explicite).

● Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l \quad (l\in\mathbb{R})$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

● Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

● Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

2°) Exemple

u est la suite définie par $u_n = \dfrac{2n^2}{n^2+1}$.
Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

$f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$
$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n = f(n)$

f est une fonction rationnelle non nulle donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^2}{x^2}\right) = 2$.

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.
u est une suite convergente.

3°) Remarque

Désormais on pourra appliquer directement la règle sur les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles en $+\infty$.

VI. Limites de référence

1°) Limites déduites de celles des fonctions

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (n) = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2) = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (n^3) = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^3} = 0$

2°) Limite de la suite $\left(q^n\right)$ (démontré dans le chapitre suivant)

• Si $q \leq -1$, alors la suite $\left(q^n\right)$ n'admet pas de limite.
• Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(q^n\right) = 0$
• Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(q^n\right) = 1$
• Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(q^n\right) = +\infty$.

Rédaction en exercice :

$\lim\limits_{n \to +\infty} (0,2)^n = 0$ car $-1 < 0,2 < 1$ ou $0,2 \in \left]-1\,;1\right[$.

VII. <u>Opérations algébriques sur les limites de suites</u>

1°) Mêmes règles que pour les limites de fonctions

Mêmes F.I. que pour les fonctions (« $+\infty - \infty$ », « $0 \times \infty$ », « $\dfrac{\infty}{\infty}$ », « $\dfrac{0}{0}$ »).

2°) Exemple

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3 \\ \text{et si } \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty \end{array}\right\} \text{ alors } \lim\limits_{n \to +\infty} \left(u_n + v_n\right) = +\infty.$$

3°) Cas particulier des suites convergentes

u et v sont deux suites convergentes.
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l \quad (l \in \mathbb{R})$; $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l' \quad (l' \in \mathbb{R})$
k est un réel.
• La suite $\left(u_n + v_n\right)$ converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(u_n + v_n\right) = l + l'$.
• La suite $\left(ku_n\right)$ converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(ku_n\right) = k \times l$.
• La suite $\left(u_n \times v_n\right)$ converge et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(u_n \times v_n\right) = l \times l'$.
• La suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge lorsque $l' \neq 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = \dfrac{l}{l'}$.