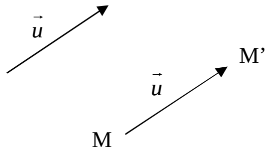
1$^{\text{ère}}$ S   La translation dans le plan et dans l'espace

I. Définition et vocabulaire

1°) Définition de l'image d'un point

$\vec{u}$ est un vecteur fixé du plan.
Pour tout point M quelconque du plan, il existe un unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Le point M' est appelé l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$ (ou le translaté).



2°) Notations

$t_{\vec{u}}(\mathrm{M}) = \mathrm{M}'$

ou

$t_{\vec{u}} : \mathrm{M} \mapsto \mathrm{M}'$

ou

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{t_{\vec{u}}} & P \\ \mathrm{M} & \longmapsto & \mathrm{M}' \end{array}$$

3°) Translation réciproque

$$\mathrm{M} \underset{t_{-\vec{u}}}{\overset{t_{\vec{u}}}{\rightleftarrows}} \mathrm{M}'$$

$\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{M'M} = -\vec{u}$

On écrira $\left(t_{\vec{u}}\right)^{-1} = t_{-\vec{u}}$

4°) Cas particulier

$\vec{u} = \vec{0}$

$t_{\vec{0}} = \mathrm{id}_P$

$\downarrow$

« identité du plan »
ou « application identité »

5°) Points invariants

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors $t_{\vec{u}}$ n'admet aucun point invariant.

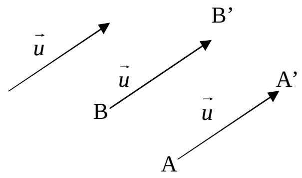
II. Relation fondamentale et conséquences

1°) Relation fondamentale

$$\begin{array}{ccc} & t_{\vec{u}} & \\ \mathrm{A} & \longmapsto & \mathrm{A}' \\ \mathrm{B} & \longmapsto & \mathrm{B}' \end{array}$$

$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$

2°) Démonstration



$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \vec{u}$
Donc le quadrilatère ABB'A' est un parallélogramme.

Par suite, $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$

3°) Conséquence sur les distances

A'B' = AB

La translation conserve les distances.
On dit que la translation est une « isométrie ».

4°) Conséquences sur les aires

La translation conserve les aires.

III. Images des figures usuelles

1°) Image d'un cercle : cercle de même rayon.

2°) Image d'une droite : droite parallèle.

3°) Image d'un segment : segment parallèle de même longueur.

IV. Propriétés de conservation

1°) Conservation des distances

2°) Conservation des aires

3°) Conservation des angles orientés et des angles géométriques

4°) Conservation des barycentres

5°) Conservation des milieux

6°) Conservation du parallélisme et de l'orthogonalité

7°) Conservation de l'alignement et de l'ordre des points

V. Expression analytique

1°) Propriété

> $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ **est un repère du plan.**
>
> $\vec{u}\left(a, b\right)$
>
> $\mathbf{M}\ (x, y) \xmapsto{t_{\vec{u}}} \mathbf{M'}(x', y')$
>
> **On a :** $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$

2°) Démonstration

$$\mathrm{M}' = t_{\vec{u}}\left(\mathrm{M}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{MM}'} = \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{\mathrm{M}'} - x_{\mathrm{M}} = x_{\vec{u}} \\ y_{\mathrm{M}'} - y_{\mathrm{M}} = y_{\vec{u}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases}$$

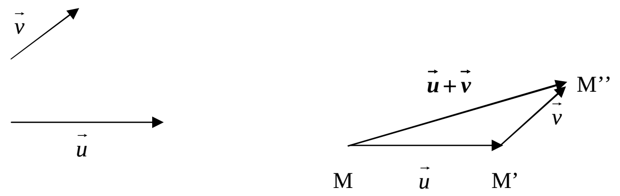
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

VI. Composée de deux translations

1°) Propriété

> $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ **sont deux vecteurs fixés du plan.**
>
> $t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$

2°) Démonstration



$$\mathrm{M} \xmapsto{t_{\vec{u}}} \mathrm{M}' \xmapsto{t_{\vec{v}}} \mathrm{M}''$$

$\overrightarrow{\mathrm{MM}'} = \vec{u}$

$\overrightarrow{\mathrm{M'M''}} = \vec{v}$

D'où $\overrightarrow{\mathrm{MM''}} = \overrightarrow{\mathrm{MM'}} + \overrightarrow{\mathrm{M'M''}} = \vec{u} + \vec{v}$.

Donc $\mathrm{M''} = t_{\vec{u}+\vec{v}}\left(\mathrm{M}\right)$.

VII. Translation dans l'espace

1°) Définition

Même que dans le plan.

2°) Propriétés

Mêmes que dans le plan + conservation du volume.

La translation conserve l'orthogonalité des droites (dans l'espace on ne parle de droites perpendiculaires que lorsqu'elles sont sécantes, sinon on parle de droites perpendiculaires).

Image d'un plan : plan parallèle.

Image d'une sphère : sphère de même rayon.