1$^{\text{ère}}$ S

L'homothétie dans le plan et dans l'espace

I. Exemples introductifs

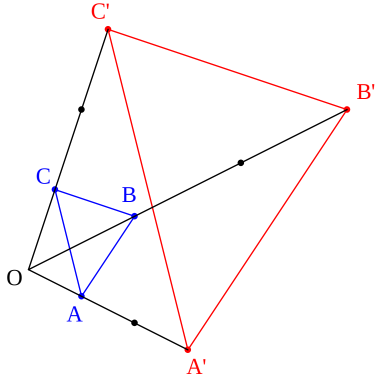
1°) Exemple 1

Hypothèses

ABC est un triangle quelconque.
O est un point extérieur au triangle.

Construire au compas :

- le point A' tel que $\overrightarrow{OA'} = 3\,\overrightarrow{OA}$
- le point B' tel que $\overrightarrow{OB'} = 3\,\overrightarrow{OB}$
- le point C' tel que $\overrightarrow{OC'} = 3\,\overrightarrow{OC}$



Conclusion :

La transformation qui permet de passer du triangle ABC au triangle A'B'C' est l'homothétie de centre O et de rapport 3.

Notation :

$$\begin{array}{l} A \xmapsto{h_{(O,\,3)}} A' \\ B \longmapsto B' \\ C \longmapsto C' \end{array}$$

(au niveau des aires : $\mathcal{A}_{A'B'C'} = 9 \times \mathcal{A}_{ABC}$)

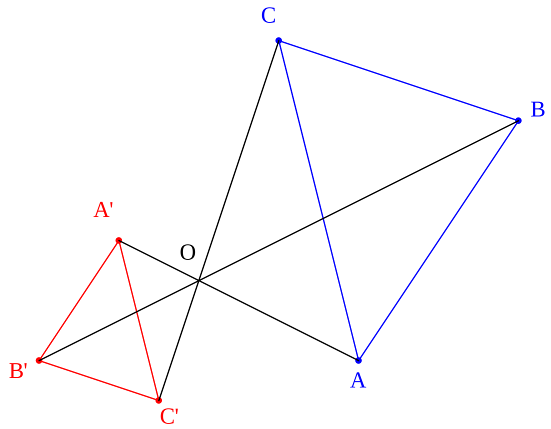
2°) Exemple 2

Hypothèses

ABC est un triangle quelconque.
O est un point extérieur au triangle.

Construire au compas :

- le point A' tel que $\overrightarrow{OA'} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}$
- le point B' tel que $\overrightarrow{OB'} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$
- le point C' tel que $\overrightarrow{OC'} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OC}$



Conclusion :

La transformation qui permet de passer du triangle ABC au triangle A'B'C' est l'homothétie de centre O et de rapport $-\dfrac{1}{2}$.

Notation :

$$\begin{array}{l} A \xmapsto{h_{(O,\,3)}} A' \\ B \longmapsto B' \\ C \longmapsto C' \end{array}$$

(au niveau des aires : $\mathcal{A}_{A'B'C'} = \dfrac{1}{4} \times \mathcal{A}_{ABC}$)

II. Image d'un point

1°) Définition

O est un point du plan.
***k* est un réel fixé non nul.**
Pour tout point M quelconque du plan, il existe un unique point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

Le point M' est appelé image de M par l'homothétie de centre O et de rapport *k* (ou l'homothétique).

2°) Notation

L'homothétie $\left|\begin{array}{l}\textbf{de centre O}\\ \textbf{de rapport } k\end{array}\right.$ **est notée** $h_{(O,k)}$.

$h_{(O,k)}(M) = M'$

ou

$h_{(O,k)} : M \mapsto M'$

ou

$$\begin{array}{ccc} & h_{(O,k)} & \\ P & \longrightarrow & P \\ M & \longmapsto & M' \end{array}$$

3°) Position de l'image

$\forall M \in P \quad \overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM}$
Donc $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont colinéaires.
Par suite, les points O, M, M' sont alignés.

4°) Image du centre

$\overrightarrow{OO'} = k\overrightarrow{OO}$
$\overrightarrow{OO'} = k\vec{0}$
$O' = O$

Le point O est invariant (c'est-à-dire confondus avec leur image).

5°) Cas particuliers

- $k = -1$

$h_{(O,-1)} = S_O$ (symétrie centrale de centre O)

- $k = 1$

$h_{(O,-1)} = \mathrm{id}_P$ (identité du plan)

$\forall M \in P \quad \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM}$
$\forall M \in P \quad M' = M$

$\mathrm{id}_P : M \mapsto M$

6°) Homothétie réciproque

$$M \underset{h_{\left(O,\frac{1}{k}\right)}}{\overset{h_{(O,k)}}{\rightleftarrows}} M' \text{ tel que } \overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{k}\overrightarrow{OM'}$$

(homothétie réciproque)

On écrira $\left(h_{(O,k)}\right)^{-1} = h_{\left(O,\frac{1}{k}\right)}$

signifie réciproque

7°) Recherche des points invariants (c'est-à-dire confondus avec leur image)

On suppose que $k \neq 1$.

M est invariant par $h_{(O,k)}$ $\Leftrightarrow M' = M$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM}$
$\Leftrightarrow k\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}$
$\Leftrightarrow (k-1)\overrightarrow{OM} = \vec{0}$ $\quad$ ($k \neq 1$ donc $k - 1 \neq 0$)
$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow M = O$

Le seul point invariant par une homothétie de rapport $k \neq 1$ est le centre de l'homothétie.

III. Relation fondamentale et conséquences

1°) Relation fondamentale

$$\begin{array}{ccc} & h_{(O,k)} & \\ A & \longmapsto & A' \\ B & \longmapsto & B' \end{array}$$

$\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$

2°) Démonstration

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A'B'} &= \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'}\\ &= k\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OA}\\ &= k\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)\\ &= k\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

3°) Conséquence sur les directions

Mêmes hypothèses.

Si $A \neq B$, alors $A' \neq B'$ et (A'B') // (AB).

4°) Effet sur les distances

$$\left\| \overrightarrow{A'B'} \right\| = \left\| k\overrightarrow{AB} \right\|$$

$$A'B' = |\,k\,|\ AB$$

On dit qu'une homothétie multiplie les distances par | *k* |.

IV. Image d'un barycentre

1°) Propriété

Une homothétie conserve les barycentres.

2°) Démonstration ROC

● Hypothèses

A et B sont deux points quelconques.
G est le barycentre des points (A ; *a*) et (B ; *b*) $(a + b \neq 0)$.

$$\begin{array}{lcl} & h_{(O,\,k)} & \\ A & \longmapsto & A' \\ B & \longmapsto & B' \\ G & \longmapsto & G' \end{array}$$

● But

Démontrer que G' est le barycentre de (A' ; *a*) et de (B' ; *b*).

● Démonstration

relation fondamentale pour l'homothétie

$$\begin{aligned} a\overrightarrow{G'A'} + b\overrightarrow{G'B'} &= ak\overrightarrow{GA} + bk\overrightarrow{GB} \\ &= k\Big(\underbrace{a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB}}_{\vec{0}}\Big) \end{aligned}$$

(définition d'un barycentre)

Comme $a + b \neq 0$, cette égalité exprime que G' est le barycentre des points pondérés (A' ; *a*) et de (B' ; *b*).

V. Image d'un angle orienté

1°) Propriété

Une homothétie conserve les angles orientés et les angles géométriques.

2°) Démonstration ROC

● Hypothèses

A, B, C sont trois points quelconques tels que $A \neq B$ et $A \neq C$.

$$\begin{array}{lcl} & h_{(O,\,k)} & \\ A & \longmapsto & A' \\ B & \longmapsto & B' \\ C & \longmapsto & C' \end{array}$$

● But

Démontrer que $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \quad (2\pi)$.

● Démonstration

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right) &= \left(k\overrightarrow{AB}, k\overrightarrow{AC}\right) \quad (2\pi) \\ &= \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \quad (2\pi) \end{aligned}$$

Rappel d'une règle sur les angles orientés :

$\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ et $k \neq 0$
$\left(k\vec{u}, k\vec{v}\right) = \left(\vec{u}, \vec{v}\right)$

VI. Effet sur l'alignement

1°) Propriété

Une homothétie conserve l'alignement et l'ordre des points.

2°) Démonstration ROC

● Hypothèses

A et B sont deux points quelconques tels que $A \neq B$.
M est un point quelconque sur (AB) tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

$h_{(\mathrm{O},k)}$

A ⟼ A'
B ⟼ B'
M ⟼ M'

● **But**

Démontrer que $\overrightarrow{\mathrm{A'M'}} = \lambda \overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$.

● **Démonstration**

$\overrightarrow{\mathrm{A'M'}} = k\overrightarrow{\mathrm{AM}}$
$\overrightarrow{\mathrm{A'B'}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

Or : $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ donc $\overrightarrow{\mathrm{A'M'}} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$.

VII. Image d'un segment et d'une droite

1°) Propriété

● **L'image d'un segment par une homothétie est un segment parallèle et les milieux sont conservés.**
● **L'image d'une droite est une homothétie est une droite parallèle.**

2°) Démonstration ROC

● **Hypothèses**

A et B sont deux points quelconques tels que $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$.
M est un point quelconque sur (AB) tel que $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

$h_{(\mathrm{O},k)}$

A ⟼ A'
B ⟼ B'
M ⟼ M'

● **But**

Démontrer que $\overrightarrow{\mathrm{A'M'}} = \lambda \overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$.

● **Démonstration**

$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \lambda\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (1)
$\overrightarrow{\mathrm{A'M'}} = k\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ (2)

∗ Lorsque λ décrit $\mathbb{R}$, le point M décrit la droite (AB) d'après (1) et le point M' décrit la droite (A'B') d'après (2).

∗ Lorsque λ décrit [0 ; 1], alors le point M décrit le segment [AB] d'après (1) et le point M' décrit le segment [A'B'] d'après (2).

∗ Lorsque $\lambda = \frac{1}{2}$, alors M est le milieu de [AB] et M' est le milieu de [A'B'].

3°) Cas particulier

Lorsque la droite passe par le centre de l'homothétie, alors elle est **globalement invariante** par l'homothétie (son image est confondue avec elle-même).

4°) Conservation du parallélisme et de l'orthogonalité

● Si deux droites sont parallèles, alors leurs images sont parallèles.
● Si deux droites sont perpendiculaires, alors leurs images sont perpendiculaires.

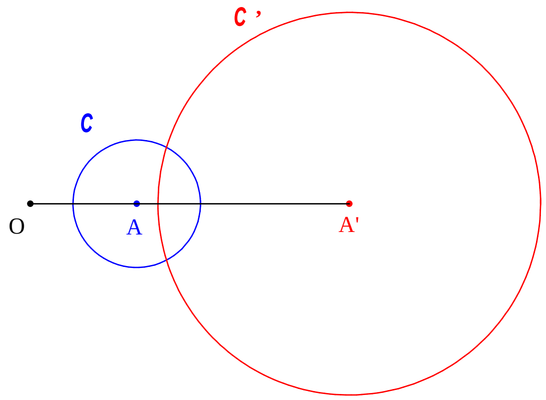
VIII. Image d'un cercle

1°) Propriété

L'image d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon R par une homothétie $h_{(\mathrm{O},k)}$ est un cercle $\mathcal{C}'$ de centre $h_{(\mathrm{O},k)}(\mathrm{A}) = \mathrm{A}'$ et de rayon $R' = |k| \times R$.

Figure

$k = 3$



2°) Démonstration

● **Hypothèses**

$\mathcal{C}$ est un cercle $\left|\begin{array}{l}\text{de centre A} \\ \text{de rayon } R > 0\end{array}\right.$.

$h_{(\mathrm{O},k)}(\mathrm{A}) = \mathrm{A}'$

$\mathcal{C}'$: cercle $\left|\begin{array}{l}\text{de centre A}' \\ \text{de rayon } R' = |k| \times R\end{array}\right.$.

• But

Démontrer que $h_{(O,k)}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$.

• Démonstration

Principe :

On va d'abord démontrer que tous les points du cercle $\mathcal{C}$ $\left|\begin{array}{l}\text{sont "envoyés"}\\ \text{ont leur image}\end{array}\right.$ sur le cercle $\mathcal{C}'$.

On va ensuite démontrer que tout point du cercle $\mathcal{C}'$ est bien l'image d'un point du cercle $\mathcal{C}$.

1^er point :

M est un point quelconque de $\mathcal{C}$.
M' est son image par $h_{(O,k)}$.

$$\begin{array}{lcl} A & \xmapsto{h_{(O,k)}} & A' \\ M & \longmapsto & M' \end{array}$$

D'où $A'M' = |k| \times AM = |k| \times R = R'$.

Donc $M' \in \mathcal{C}'$.

2^e point :

N' est un point quelconque de $\mathcal{C}'$.
N est son antécédent par $h_{(O,k)}$.

$$\begin{array}{lcl} A & \xmapsto{h_{(O,k)}} & A' \\ N & \longmapsto & N' \end{array} \qquad \overrightarrow{AN} = \frac{1}{k}\overrightarrow{A'N'}$$

D'où $AN = \frac{1}{|k|} \times A'N' = \frac{1}{|k|} \times |k| \times R = R$.

Donc $N \in \mathcal{C}$.

IX. Image d'une figure

1°) Propriété (admise sans démonstration)

Une homothétie conserve la nature des figures.

2°) Effet sur les aires

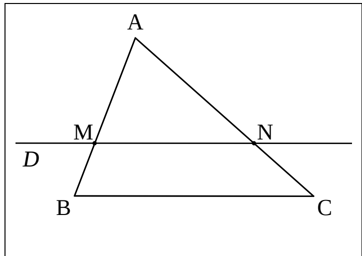
Une homothétie de rapport k multiplie les aires $|k|^2 = k$.

X. Triangles homothétiques

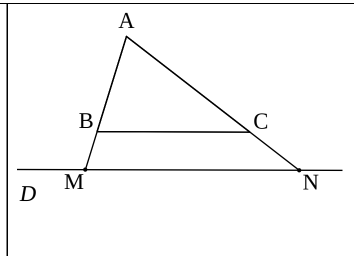
1°) Propriété

ABC est un triangle quelconque.

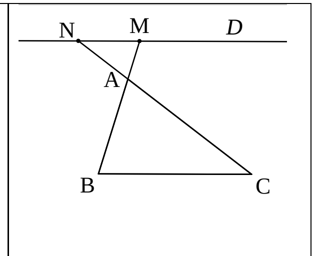
D est une droite parallèle à (BC).
D coupe (AB) en M et (AC) en N.



Configuration 1



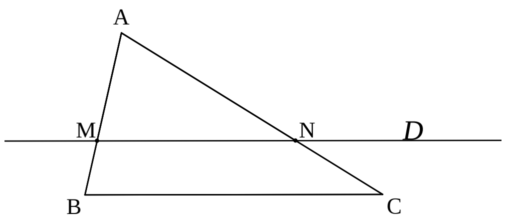
Configuration 2



Configuration 3

L'homothétie de centre A qui transforme B en M transforme également C en N.

2°) Démonstration



h : homothétie de centre A qui transforme B en M.

Démontrons que $h(B) = M$ donc l'image de (BC) par *h* est la droite passant par M et parallèle à (BC) c'est-à-dire *D*.

Posons $C' = h(C)$.

On sait que $C' \in (AC)$.

De plus, $C \in (BC)$ donc $C' \in D$.
On en déduit que C' est le point d'intersection de (AC) et de *D*.

Conclusion :

$C' = N$

3°) Conséquence : théorème de Thalès vectoriel

ABC est un triangle quelconque.
$M \in (AB)$
$N \in (AC)$
Si (MN) // (BC), alors il existe un unique réel k tel que :
$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BC}$

k est le rapport de l'homothétie de centre A qui transforme B en M et C en N.
On dit que les triangles AMN et ABC sont **homothétiques**.

<u>Lien avec le théorème de Thalès</u>

On prend les normes.

$AM = |\, k \,| \times AB$
$AN = |\, k \,| \times AC$
$MN = |\, k \,| \times BC$

D'où $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$.

XI. <u>Homothéties dans l'espace</u>

1°) Définition

Même que dans le plan.

2°) Propriétés

∗ Mêmes propriétés sur :

- les distances
- la conservation des $\begin{cases} \text{barycentres} \\ \text{milieu} \end{cases}$

- images de $\begin{cases} \text{droites} \\ \text{segments} \\ \text{cercles} \end{cases}$

- conservation des angles géométriques (pas d'angles orientés dans l'espace)
- conservation de l'orthogonalité des droites (dans l'espace, deux droites orthogonales ne sont pas forcément sécantes)

∗ L'image d'une sphère de rayon R par une homothétie de rapport k est une sphère de rayon : $R' = |k| \times R$.

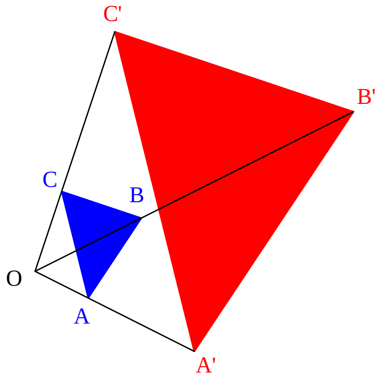
∗ L'image d'un plan est un plan parallèle.

3°) Effet sur les volumes (admis sans démonstration)

Une homothétie de rapport *k* multiplie les volumes par $|\, k \,|^3$.

I. Exemples introductifs

1ère figure



2e figure