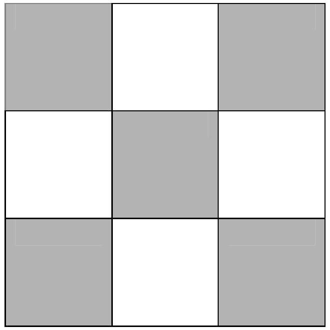
$1^{\text{ère}}$ S3 — Devoir pour le lundi 3 mai 2010

I. On dispose de petits cubes de 1 cm d'arête, des blancs et des noirs. On empile des cubes de façons à former un cube de 3 cm d'arête en prenant bien soin d'alterner les cubes blancs et les noirs. Toutes les faces du grand cube sont donc disposées comme sur la figure ci-dessous.
Le petit cube central du grand cube est noir.
Quel est le nombre de cubes noirs ?



II. Soit ABCDEFGH un cube. On note I le milieu de [AE] et J le centre de la face CDHG.

Faire une figure en perspective cavalière en prenant la face ABFE comme face frontale.

1°) Soit D' le symétrique de D par rapport à A.

a) Démontrer que I est le milieu de [HD'].
b) Démontrer que (IJ) // (CD').
c) En déduire la position relative de la droite (IJ) et du plan (ABC).

2°) Soit P et Q les points définis par les égalités vectorielles $\overrightarrow{\mathrm{EP}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{EH}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$.
On note K le milieu de [PQ].

On se propose de démontrer que les points I, J et K sont alignés en utilisant 3 méthodes <u>**indépendantes**</u>.

$1^{\text{ère}}$ méthode : démontrer que I, J, K sont alignés en utilisant les vecteurs.

2^{e} méthode : démontrer que I, J, K sont alignés en utilisant le repère $\left(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$ de l'espace.

3^{e} méthode : démontrer que I, J, K sont alignés en utilisant les barycentres.

Indication : on commencera par exprimer chacun des deux points P et Q comme barycentre de deux points pondérés.

III.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1 ; 4\}$ par $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-3x-4}$ où a et b sont deux réels.
Déterminer les valeurs de a et b sachant que la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ passe par le point $\mathrm{A}\left(1 ; -\dfrac{1}{2}\right)$ et la tangente en ce point a pour coefficient directeur $\dfrac{1}{4}$.

Partie B

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1 ; 4\}$ par $g(x)=\dfrac{x^2-3x+5}{x^2-3x-4}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité graphique : le centimètre).
1°) Déterminer les limites de g en -1, 4, $+\infty$, $-\infty$; en déduire que $\mathcal{C}$ admet trois asymptotes Δ, Δ' et Δ'' que l'on définira (faire des phrases correctement rédigées).
2°) Justifier que g est dérivable sur son ensemble de définition.
Calculer $g'(x)$ et faire un tableau récapitulatif comprenant l'étude du signe de $g'(x)$ et les variations de g avec les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
Calculer le (ou les) extremum(s) de g.
3°) Déterminer l'ordonnée du point I où $\mathcal{C}$ coupe l'axe des ordonnées.
4°) Faire un tableau de valeurs.
Sur un graphique, tracer le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ <u>en prenant le centimètre pour unité de longueur</u>.
Tracer les asymptotes Δ, Δ' et Δ''.
Placer les points du tableau de valeurs.
Tracer la (les) tangente(s) horizontale(s).
Commencer le tracé de $\mathcal{C}$ en reliant les points « à la main ».
Achever enfin le tracé de $\mathcal{C}$ en soignant le tracé des branches infinies.
Vérifier sur calculatrice graphique ou sur ordinateur.
5°) Démontrer que $\mathcal{C}$ admet la droite D d'équation $x=\dfrac{3}{2}$ pour axe de symétrie.

Partie C

Soit m un réel fixé.
Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$ (E) suivant les valeurs du paramètre m.

$1^{\text{ère}}$ S3 Correction du devoir pour le 3 mai 2010

I. 13

II. Bien écrire toutes hypothèses au début de l'énoncé dans un encadré à droite de la figure.
On complètera les hypothèses au fur et à mesure de la recherche de l'exercice.

Hypothèses :

ABCDEFGH cube
I : milieu de [AE]
J : centre de la face CDHG
D' : symétrique de D par rapport à A
$\overrightarrow{EP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$
$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
K : milieu de [PQ].

1°)

a) Démontrons que I est le milieu de [HD'].

$1^{\text{ère}}$ méthode :

La face ADHE est un carré donc on a : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{EH}$
De plus D' est le symétrique de D par rapport à A donc $\overrightarrow{DA'}=\overrightarrow{AD}$.

On a donc : $\overrightarrow{DA'}=\overrightarrow{EH}$
Par suite le quadrilatère AD'EH est un parallélogramme.
Comme I est le milieu de [EA] donc I est aussi le milieu de [D'H].

2^{e} méthode : un peu moins bonne avec les vecteurs

$\overrightarrow{HD'}=\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DD'}$
De plus D' est le symétrique de D par rapport à A donc $\overrightarrow{DD'}=2\overrightarrow{AD'}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{HD'}&=\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{DD'}\\&=\overrightarrow{EA}+2\overrightarrow{AD'}\\&=2\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{AD'}\\&=2\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AD'}\right)\\&=2\overrightarrow{ID}\end{aligned}$$

Donc I est le milieu de [HD']

b) Dans le triangle, HDC', I est le milieu de [HD'] et J est le milieu de [HC].
Donc d'après le théorème de la droite des milieux, (IJ) // (CD').

c) Par hypothèse, D'est le symétrique de D par rapport à A, donc D' $\in$(AD). Donc D' appartient au plan (ABC).
De plus, (IJ) // (CD').
Or si une droite est parallèle à une droite d'un plan, alors elle est parallèle à ce plan.

On en déduit que (IJ) // (ABC).

2°)

$1^{\text{ère}}$ méthode : en utilisant les vecteurs.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ}&=\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{HJ}\\&=\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{EH}+\frac{1}{2}\overrightarrow{HC}\\&=\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{EH}+\frac{1}{2}\overrightarrow{HE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{EH}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IK}&=\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{EP}+\overrightarrow{PK}\\&=\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{EP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}\\&=\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{EP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}\\&=\overrightarrow{IE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{EH}+\frac{1}{6}\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{EI}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\\&=\frac{1}{6}\overrightarrow{EH}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

On a donc : $\overrightarrow{IK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IJ}$.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires.

Donc I, J, K sont alignés.

2^{e} méthode : en utilisant le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ de l'espace.

A(0 ; 0 ; 0), C(1 ; 1 ; 0), D(0 ; l ; 0), E(0 ; 0 ; 1), G(1 ; 1 ; 1)

I est le milieu de [EA] donc $I\left(0\,;0\,;\frac{1}{2}\right)$ (formule des coordonnées d'un milieu)

J est le centre de HGCD donc J est le milieu de [DG]. Par suite, $J\left(\frac{1}{2};1;\frac{1}{2}\right)$.

$P\left(0\,;\frac{1}{3};1\right)$ $\quad Q\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};0\right)$

K est le milieu de [PQ] donc $K\left(\frac{1}{6};\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)$

$\overrightarrow{IJ}\left(\frac{1}{2};1;0\right)$ et $\overrightarrow{IK}\left(\frac{1}{6};\frac{1}{3};0\right)$

On a donc : $\overrightarrow{IK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IJ}$. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires et donc I, J, K sont alignés.

3^e méthode : en utilisant les barycentres.

D'après l'égalité vectorielle définissant le point P, P est le barycentre des points pondérés (E ; 2) et (H ; 1).
D'après l'égalité vectorielle définissant le point Q, Q est le barycentre des points pondérés (A ; 2) et (C ; 1).
Or I est le milieu du segment [AE] donc I est le barycentre des points pondérés (A ; 1) et (E ; 1)
et J est le milieu du segment [CH] donc J est le barycentre des points pondérés (C ; 1) et (H ; 1).

K est le milieu du segment [PQ] donc K est le barycentre des points pondérés (P ; 1) et (Q ; 1).
Donc d'après la propriété d'associativité du barycentre, K est le barycentre des points pondérés (E ; 2), (H ; 1), (A ; 2), (C ; 1).
Donc d'après la propriété d'associativité du barycentre, K est le barycentre des points pondérés (I ; 2) et (J ; 1).

On en déduit que les points I, J, K sont alignés.

III.

Partie A

$f(1)=-\dfrac{1}{2}$ (1) ; $f'(1)=\dfrac{1}{4}$ (2) (le coefficient directeur de la tangente en A est $f'(1)$ et deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur).

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;4\}\quad f'(x)=\frac{(2x+a)(x^2-3x-4)-(2x-3)(x^2+ax+b)}{(x^2-3x-4)^2}$$
$$=\frac{(-a-3)x^2-(2b-8)x-4a+3b}{(x^2-3x-4)^2}$$

(1) permet d'écrire : $\dfrac{1+a+b}{-6}=-\dfrac{1}{2}$ (1')

(2) permet d'écrire : $\dfrac{-a-3-2b-8-4a+3b}{36}=\dfrac{1}{4}$ (2')

$$\begin{cases}(1')\\(2')\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1+a+b}{-6}=-\dfrac{1}{2}\\[2mm]\dfrac{-a-3-2b-8-4a+3b}{36}=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b+1=3\\-5a+b-11=9\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=2\\-5a+b=20\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=2-a\\-6a=18\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=2-a\\-6a=18\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=5\\a=-3\end{cases}$$

On en déduit que l'expression de f est donnée par : $f(x)=\dfrac{x^2-3x+5}{x^2-3x-4}$.

Partie B

1°)

Limites en $+\infty$ ou en $-\infty$

D'après la règle de limite d'une fonction rationnelle non nulle en $+\infty$ ou en $-\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(1)=1$.

De même, on trouve $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=1$.

On en déduit que $\mathcal{C}$ admet la droite Δ'' d'équation réduite $y=1$ pour asymptote horizontale en $+\infty$ et $-\infty$.

Limites en –1

$\lim\limits_{x\to-1}(x^2-3x-5)=9$

$\lim\limits_{x\to-1}(x^2-3x-4)=0$

On effectue un tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
Signe de x^2-3x-4		+	0	–	0	+	

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to(-1)^-}(x^2-3x-5)=9\\ \lim\limits_{x\to(-1)^-}(x^2-3x-4)=0^+\end{array}\right\}\text{donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{x\to(-1)^-} g(x)=+\infty.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x^2-3x-5)=9\\ \lim\limits_{x\to(-1)^+}(x^2-3x-4)=0^-\end{array}\right\}\text{donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{x\to(-1)^+} g(x)=-\infty$$

On en déduit que $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation réduite $x=-1$ pour asymptote verticale.

Limite en 4

$\lim\limits_{x\to4}(x^2-3x+5)=9$

$\lim\limits_{x\to4}(x^2-3x-4)=0$

On réutilise le tableau de signes précédent.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to4^-}(x^2-3x+5)=9\\ \lim\limits_{x\to4^-}(x^2-3x-4)=0^-\end{array}\right\}\text{donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{x\to4^-} g(x)=-\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 4^+}\left(x^2-3x+5\right)=9\\ \lim\limits_{x\to 4^+}\left(x^2-3x-4\right)=0^+\end{array}\right\}\text{donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{x\to 4^+} g(x)=+\infty$$

On en déduit que **C** admet la droite Δ' d'équation réduite $x=4$ pour asymptote verticale.

2°) g est fonction rationnelle donc elle est dérivable sur son ensemble de définition.

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\,;\,4\}\quad g'(x)=\frac{-18x+27}{\left(x^2-3x+4\right)^2}$$

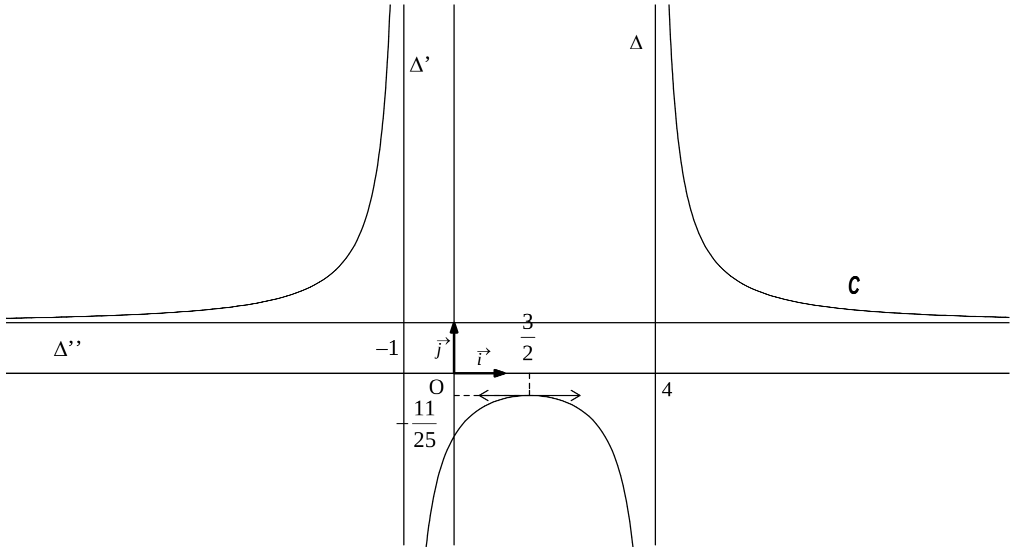
Tableau récapitulatif

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		4		$+\infty$
SGN de $-18x+27$		+	|	+	0	–	|	+	
SGN de $\left(x^2-3x+4\right)^2$		+	0	+		+	0	+	
SGN de $g'(x)$		+	‖	+	0	–	‖	+	
Variations de g	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-\frac{11}{25}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

$$g\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{11}{25}$$

3°) $g(0)=-\frac{5}{4}$ donc **C** coupe l'axe des ordonnées au point $\mathrm{I}\left(0\,;-\frac{5}{4}\right)$.

4°) $g(1)=-\frac{1}{2}$, $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{7}$, $g\left(-\frac{1}{2}\right)=3$, $g(-2)=\frac{5}{2}$.



5°) Démontrons que **C** admet la droite D d'équation $x=\frac{3}{2}$ pour axe de symétrie.

Le domaine de définition de la fonction g est symétrique par rapport à $\frac{3}{2}$ (ce qui est vrai car $\frac{3}{2}$ est le centre de l'intervalle [–1 ; 4]).

$$g\left(\frac{3}{2}-h\right)=\frac{\left(\frac{3}{2}-h\right)^2-3\left(\frac{3}{2}-h\right)+5}{\left(\frac{3}{2}-h\right)^2-3\left(\frac{3}{2}-h\right)-4}$$

$$=\frac{\frac{9}{4}-3h+h^2-\frac{9}{2}+3h+5}{\frac{9}{4}-3h+h^2-\frac{9}{2}+3h-4}$$

$$=\frac{h^2+\frac{11}{4}}{h^2-\frac{25}{4}}$$

$$g\left(\frac{3}{2}+h\right)=\frac{h^2+\frac{11}{4}}{h^2-\frac{25}{4}}$$ (on refait le même calcul ou remplace h par $-h$)

$$\forall h\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right\}\quad g\left(\frac{3}{2}+h\right)=g\left(\frac{3}{2}-h\right)$$

On en déduit que **C** admet la droite D d'équation $x=\frac{3}{2}$ pour axe de symétrie.

Partie C

Les solutions de l'équation (E) sont les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite D d'équation $y = m$.

Discussion sur *m*

- Si $m < -\frac{11}{25}$, alors l'équation (E) a deux solutions.
- Si $m = -\frac{11}{25}$, alors l'équation (E) a une seule solution.
- Si $-\frac{11}{25} < m \leq 1$, alors l'équation (E) n'a pas de solutions.
- Si $m > 1$, alors l'équation (E) a deux solutions.

Source pour le I : 13 Tangente éducation Mars 2010 n°12 page 13 Mathématiques africaines, Réconciliation (Troisième)