**TS3**

# Contrôle du mercredi 1er avril 2009 (4 heures)

**Prénom : ……………………………… Nom : ………………………………………………**

**L'usage de la calculatrice est autorisé.**

**☐ L'en-tête de la copie doit être correctement libellé : nom, prénom, classe, date, intitulé exact sans abréviations ainsi qu'un cartouche de présentation avec le numéro des exercices.**
**☐ L'énoncé devra être mis dans la copie avec le nom indiqué.**
**☐ Les exercices doivent être traités dans l'ordre, sans renvoi sur d'autres feuilles, avec les numéros des exercices et des questions correctement indiqués.**
**☐ On attachera un soin particulier à la présentation des calculs, des réponses, des résultats (en les encadrant en rouge) et à l'orthographe.**

---

**I. (4 points)** Une urne contient autant de boules noires que de boules blanches, indiscernables au toucher.
On tire trois fois de suite une boule de cette urne, avec remise entre chacun des tirages. À chaque fois, on note la couleur de la boule tirée. Faire un arbre de possibilités au brouillon.

**Partie A**

On considère les événements suivants :
A : « Les boules tirées ne sont pas toutes de la même couleur. »
B : « Il y a au plus une boule noire parmi les boules tirées. »
1°) Calculer les probabilités des événements A et B.
2°) Les événements A et B sont-ils des événements indépendants ? Justifier.

**Partie B**

On gagne 10 € si l'on obtient 3 boules blanches, on gagne 5 € si l'on obtient deux boules blanches exactement, on gagne 2 € si l'on obtient une boule blanche exactement, on perd 20 € si l'on n'obtient que des boules noires.

1°) Déterminer la loi de probabilité du gain $X$ (positif ou négatif) du joueur.
Faire un tableau de la forme :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | … | | |
| $P(X=x_i)$ | | | | | Total $=1$ |

Calculer $P(X>0)$ et $P(X<0)$.
2°) Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de $X$ (valeur exacte puis valeur approchée).
3°) Combien le joueur devrait-il perdre lorsqu'il n'obtient que des boules noires pour que le jeu soit équitable ?

---

**II. (2 points)** Trois machines $M_1$, $M_2$ et $M_3$ fabriquent respectivement 10 %, 20 % et 70 % des pièces sortant d'une usine. La probabilité qu'une pièce soit défectueuse si elle est fabriquée par la machine $M_i$ vaut $p_i$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

1°) On tire au hasard une pièce dans un lot provenant de cette usine.
Cette pièce étant défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée
- par la machine $M_1$ ?
- par la machine $M_2$ ?
- par la machine $M_3$ ?

Détailler le calcul pour $M_1$ uniquement. Donner l'expression en fonction de $p_1$, $p_2$, $p_3$.
Donner sans justifier les deux autres résultats.

2°) On suppose que $p_1 = 0,05$, $p_2 = 0,04$ et $p_3 = 0,01$.
Si une pièce est défectueuse, est-il plus probable qu'elle provienne de $M_1$, de $M_2$ ou de $M_3$ ?

---

**III. (3 points)** Une entreprise artisanale de fabrication d'objets vérifie la qualité de sa production avant sa commercialisation.
Chaque objet produit par l'entreprise peut présenter deux défauts A et B.
Il s'avère, à la suite d'un grand nombre de vérifications, que :
- 8 % des objets ont le défaut A ;
- parmi les objets qui n'ont pas le défaut A, 95 % n'ont pas le défaut B ;
- 2 % des objets ont les deux défauts.

On prend un objet au hasard dans la production.

Traduire au brouillon les données de l'énoncé en utilisant les notations des probabilités.
On pourra faire un arbre complet à partir de la question 2.

| | | |
|---|---|---|
| **1** | Donner la probabilité que l'objet présente le défaut B sachant qu'il présente le défaut A. | |
| **2** | Donner la probabilité que l'objet présente le défaut B (donner la valeur exacte). | |
| **3** | Donner la probabilité que l'objet soit sans le défaut A sachant qu'il n'a pas le défaut B (donner valeur arrondie au millième). | |

---

**IV. (2 points)** On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = \frac{3}{2}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{-2}{u_n - 3}$. On considère également la suite $(v_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$.

Cocher les réponses sans justifier. Aucun point n'est retiré en cas de réponse incorrecte.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | Pour tout entier naturel $n$, on a : $1 < u_n < 2$. | ☐ | V | ☐ | F |
| **2** | La suite $(u_n)$ est géométrique. | ☐ | V | ☐ | F |
| **3** | La suite $(v_n)$ est géométrique. | ☐ | V | ☐ | F |
| **4** | Pour tout entier naturel $n$, on a : $u_n = 1 + \frac{1}{1+2^n}$. | ☐ | V | ☐ | F |

## V. (2 points) QCM

Soit $(u_n)$ une suite définie sur $\mathbb{N}$. On considère la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $v_n = e^{-u_n} + 1$.

Pour chacune des questions quatre propositions sont faites dont une seule est exacte. Pour chaque question, donner sans justification une réponse.
Si la réponse est bonne elle rapporte 0,5 point, si elle est mauvaise aucun point n'est retiré.

1°) Soit $a$ est un réel strictement positif. Si $u_0 = \ln a$, alors :

a. $v_0 = \dfrac{1}{a} + 1$ b. $v_0 = \dfrac{1}{1+a}$ c. $v_0 = -a + 1$ d. $v_0 = e^{-a} + 1$

2°) Si $(u_n)$ est strictement croissante, alors :

a. $(v_n)$ est strictement décroissante et majorée par 2 c. $(v_n)$ est strictement croissante et majorée par 2

b. $(v_n)$ est strictement croissante et minorée par 1 d. $(v_n)$ est strictement décroissante et minorée par 1

3°) Si $(u_n)$ diverge vers $+\infty$, alors :

a. $(v_n)$ converge vers 2 c. $(v_n)$ converge vers 1

b. $(v_n)$ diverge vers $+\infty$ d. $(v_n)$ converge vers un réel $L$ tel que $L > 1$

4°) Si $(u_n)$ est majorée par 2, alors :

a. $(v_n)$ est majorée par $1 + e^{-2}$ c. $(v_n)$ est majorée par $1 + e^{2}$

b. $(v_n)$ est minorée par $1 + e^{-2}$ d. $(v_n)$ est minorée par $1 + e^{2}$

| **Question** | **1°** | **2°** | **3°** | **4°** | **Total** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Réponse** | | | | | |

## VI. (2 points) Le plan complexe $P$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On note A le point d'affixe i. On pose $P^* = P \setminus \{ A \}$.
On note $f$ l'application de $P^*$ dans $P$ qui, à tout point M de $P^*$, d'affixe $z \neq i$, associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z+i}{z-i}$.
On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec $x$, $y$, $x'$, $y'$ réels.

1°) Exprimer $x'$ et $y'$ en fonction de $x$ et $y$. Tirer les traits de fraction à la règle.

2°) Déterminer l'ensemble $E$ des points M de $P$, distincts de A, pour lesquels $z'$ est imaginaire pur.
On rédigera ainsi :

Soit M un point quelconque de $P$ d'affixe distinct de A.

On note $z$ son affixe.

$M \in E \Leftrightarrow \ldots$

$\Leftrightarrow \ldots$

$\Leftrightarrow \ldots.$

On conclura clairement : « $E$ est ……………………… ».

Faire un graphique dans le plan. On prendra 2 cm pour unité graphique.
Placer le point A et représenter l'ensemble $E$.

## VII. (2,5 points) Calculer chacune des intégrales demandées (donner les valeurs exactes).

On complétera directement le tableau ci-dessous sans détailler les calculs sur la copie.

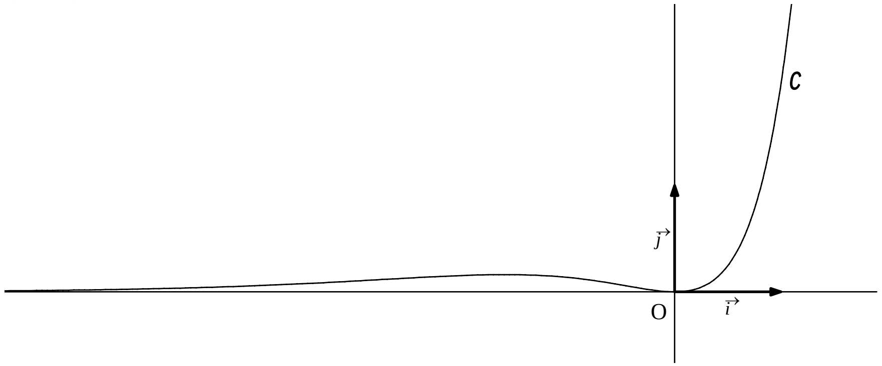
$I_1 = \displaystyle\int_0^{\ln 2} e^{-t}\,dt$ ; $I_2 = \displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{t}{t^2+1}\,dt$ ; $I_3 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin 2t\,dt$ ; $I_4 = \displaystyle\int_1^{e} \frac{\ln t}{t}\,dt$ ; $I_5 = \displaystyle\int_1^{e} t \ln t\,dt$.

| $I_1$ | $I_2$ | $I_3$ | $I_4$ | $I_5$ |
|---|---|---|---|---|
| …………… | …………… | …………… | …………… | …………… |

## VIII. (2,5 points) On considère la fonction $f : x \mapsto e^{2x} - (x+1)e^x$.

1°) a) Démontrer que pour tout réel $x$, on a : $e^x \geqslant 1 + x$. On pourra étudier une fonction.
b) En déduire que pour tout réel $x$, on a : $f(x) \leqslant 0$.

2°) Le graphique ci-dessous représente la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.




Pour tout réel $m \leqslant 0$, on pose $A(m) = \displaystyle\int_m^0 f(t)\,dt$.

a) Donner une interprétation graphique de $A(m)$. On justifiera soigneusement la réponse en rédigeant clairement.
b) Exprimer $A(m)$ en fonction de $m$.
c) Calculer la limite de $A(m)$ lorsque $m$ tend vers $-\infty$.

# Corrigé du contrôle du 1-4-2009

## I.

### 1ère partie

1°)

$$P(\mathrm{A})=1-\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{4}$$

$$P(\mathrm{B})=\left(\frac{1}{2}\right)^3+3\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}$$

2°) On calcule $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=3\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$ (par « logique » et non par une formule spéciale).

On constate que $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\times P(\mathrm{B})$ donc les événements A et B sont indépendants pour $P$.

### 2e partie

1°)

| $x_i$ | – 20 | 2 | 5 | 10 | |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | Total $=1$ |

2°)

$$\mathrm{E}(X)=\frac{11}{8}=1{,}375$$

On applique la formule de Konig-Huygens.

$$\mathrm{V}(X)=\frac{1}{8}\times10^2+\frac{3}{8}\times5^2+\frac{3}{8}\times2^2+\frac{1}{8}\times(-20)^2-\left(\frac{11}{8}\right)^2=\frac{587}{8}-\frac{121}{64}=\frac{4575}{64}=71{,}48\ldots$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{4575}{64}}=8{,}45...$$

3°) Soit $x$ la somme que le joueur devrait perdre lorsqu'il n'obtient que des boules noires pour que le jeu soit équitable.

Le jeu est équitable si et seulement si $\mathrm{E}(X)=0$

si et seulement si $-\frac{1}{8}x+3{,}875=0$

si et seulement si $x=31$

Pour que le jeu soit équitable, il faut et il suffit que le joueur perde 31 euros lorsqu'il n'obtient que des boules noires.

## II.

On note D l'événement : « la pièce est défectueuse » ;

$\mathrm{M}_1$ l'événement : « la pièce provient de la machine $\mathrm{M}_1$ » ;

$\mathrm{M}_2$ l'événement : « la pièce provient de la machine $\mathrm{M}_2$ » ;

$\mathrm{M}_3$ l'événement : « la pièce provient de la machine $\mathrm{M}_3$ » ;

1°) Il faut faire un arbre de probabilités avec les valeurs 0,1 ; 0,2 ; 0,7 ; $p_1$ ; $p_2$ ; $p_3$.

Les événements $\mathrm{M}_1$, $\mathrm{M}_2$, $\mathrm{M}_3$ forment un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(\mathrm{D})=P(\mathrm{D}/\mathrm{M}_1)\times P(\mathrm{M}_1)+P(\mathrm{D}/\mathrm{M}_2)\times P(\mathrm{M}_2)+P(\mathrm{D}/\mathrm{M}_3)\times P(\mathrm{M}_3)$$

$$P(\mathrm{D})=0{,}1\times p_1+0{,}2\times p_2+0{,}7\times p_3$$

$$P(\mathrm{M}_1/\mathrm{D})=\frac{P(\mathrm{D}\cap\mathrm{M}_1)}{P(\mathrm{D})}=\frac{P(\mathrm{D}/\mathrm{M}_1)\times P(\mathrm{M}_1)}{P(\mathrm{D})}=\frac{0{,}1p_1}{0{,}1p_1+0{,}2p_2+0{,}7p_3}=\frac{p_1}{p_1+2p_2+7p_3}$$

(en multipliant par 10 le numérateur et le dénominateur par 10).

$$P(\mathrm{M}_1/\mathrm{D})=\frac{p_1}{p_1+2p_2+7p_3}\ ;\ P(\mathrm{M}_2/\mathrm{D})=\frac{2p_2}{p_1+2p_2+7p_3}\ ;\ P(\mathrm{M}_3/\mathrm{D})=\frac{7p_3}{p_1+2p_2+7p_3}.$$

2°) $P(\mathrm{M}_1/\mathrm{D})=0{,}25$ ; $P(\mathrm{M}_2/\mathrm{D})=0{,}4$ ; $P(\mathrm{M}_3/\mathrm{D})=0{,}35$

Si une pièce est défectueuse, il est plus probable qu'elle provienne de $\mathrm{M}_2$.

---

## III.

1°) $P(\mathrm{B}/\mathrm{A})=\frac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{P(\mathrm{A})}=\frac{0{,}02}{0{,}08}=\frac{1}{4}=0{,}25$

On peut faire un arbre complet à partir de la question 2°) en utilisant le résultat de la question 1°).

2°)

$$P(\mathrm{B})=P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})+P(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B})$$

$$=0{,}02+0{,}92\times0{,}05$$

$$=0{,}066$$

3°) $P(\overline{\mathrm{A}}/\overline{\mathrm{B}})=\frac{P(\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}})}{P(\overline{\mathrm{B}})}=\frac{P(\overline{\mathrm{A}})\times P(\overline{\mathrm{B}}/\overline{\mathrm{A}})}{P(\overline{\mathrm{B}})}=\frac{0{,}95\times0{,}92}{0{,}934}=\frac{0{,}874}{0{,}934}=0{,}936...$

$$P(\mathrm{A}/\mathrm{B})=\frac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})}{P(\mathrm{B})}=\frac{0{,}08\times0{,}25}{0{,}066}=0{,}30\underline{30}...$$

## IV. Vrai ou faux ?

**1. Vrai**

On procède par récurrence :

L'hérédité se démontre ainsi.

On part de $1 < u_k < 2$.

$-2 < u_k - 3 < -1$

$\frac{-1}{2} > \frac{1}{u_k - 3} > -1$

$\frac{2}{2} < \frac{-2}{u_k - 3} < 2$

On a donc $1 < u_{k+1} < 2$.

**2. Faux**

$u_0 = \frac{3}{2}$ ; $u_1 = \frac{4}{3}$ ; $u_2 = 6$

On a : $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc la suite $(u_n)$ n'est pas géométrique.

**3. Vrai**

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{-2}{u_n - 3} - 2}{\frac{-2}{u_n - 3} - 1} = \frac{-2 - 2u_n + 6}{-2 - u_n + 3} = \frac{2u_n - 4}{u_n - 1} = 2v_n$$

$$v_0 = \frac{u_0 - 2}{u_0 - 1} = -1$$

**4. Vrai**

On a $v_n = -2^n$.

Comme $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$ par définition, on obtient $v_n u_n - v_n = u_n - 2$ par produit en croix.

Par factorisation l'égalité donne $u_n\left(v_n - 1\right) = v_n - 2$ d'où $u_n = \frac{v_n - 2}{v_n - 1} = \frac{2^n + 2}{2^n + 1}$.

On obtient enfin le résultat demandé : $u_n = \frac{2^n + 1 + 1}{2^n + 1} = \frac{2^n + 1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 1} = 1 + \frac{1}{2^n + 1}$ d'où $u_n = 1 + \frac{1}{1 + 2^n}$.

## V. QCM

| Question | 1° | 2° | 3° | 4° |
|---|---|---|---|---|
| **Réponse** | **a** | **d** | **c** | **b** |

**Justification des résultats**

1°) On sait que $u_0 = \ln a$ donc $v_0 = \mathrm{e}^{-\ln a} + 1 = \mathrm{e}^{\ln \frac{1}{a}} + 1 = \frac{1}{a} + 1$.

2°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $-u_n \geqslant -u_{n+1}$ d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\mathrm{e}^{-u_n} \geqslant \mathrm{e}^{-u_{n+1}}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 + \mathrm{e}^{-u_n} \geqslant 1 + \mathrm{e}^{-u_{n+1}}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n \geqslant v_{n+1}$.

On en déduit que $(v_n)$ est strictement décroissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\mathrm{e}^{-u_n} > 0$ d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\mathrm{e}^{-u_n} + 1 > 1$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n > 1$.
On en déduit que $(v_n)$ est minorée par 1.

3°) $\lim\limits_{n \to +\infty} u = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{-u_n} = 0$ (théorème de composition des limites suites-fonctions).

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\mathrm{e}^{-u_n} + 1\right) = 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$.

4°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \leqslant 2$ d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $-u_n \geqslant -2$.
D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, on $\mathrm{e}^{-u_n} \geqslant \mathrm{e}^{-2}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 + \mathrm{e}^{-u_n} \geqslant 1 + \mathrm{e}^{-2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n \geqslant 1 + \mathrm{e}^{-2}$.

On en déduit que $(v_n)$ est minorée par $1 + \mathrm{e}^{-2}$.

## VII.

| $I_1$ | $I_2$ | $I_3$ | $I_4$ | $I_5$ |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{\ln 5}{2}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\mathrm{e}^2 + 1}{4}$ |

On peut vérifier les résultats grâce à la calculatrice (tracer d'abord la courbe représentative de la fonction puis aller dans TRACE et sélectionner l'intégrale) en se mettant en mode radians pour les fonctions trigonométrique.

**VIII.**

$f : x \mapsto \mathrm{e}^{2x} - (x+1)\mathrm{e}^{x}$

1°) a) Démontrons que pour tout réel *x*, on a : $\mathrm{e}^{x} \geqslant 1+x$.

On étudie la fonction $u : x \mapsto \mathrm{e}^{x} - 1 - x$.

b) Pour tout réel *x*, on a : $\mathrm{e}^{x} \geqslant 1+x$.
Donc en multipliant les deux membres de cette inégalité par $\mathrm{e}^{x}$, on obtient l'inégalité : $\mathrm{e}^{2x} \geqslant (1+x)\mathrm{e}^{x}$.
Par suite, on a : $\mathrm{e}^{2x} - (1+x)\mathrm{e}^{x} \geqslant 0$.
On en déduit que pour tout réel *x*, on a : $f(x) \geqslant 0$.

2°) a) $\mathrm{A}(m) = \displaystyle\int_{m}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$

La fonction *f* est positive et continue sur $\mathbb{R}$ donc pour $m \leqslant 0$, $\mathrm{A}(m)$ représente l'aire sous la courbe sur l'intervalle [*m* ; 0].

b) On utilise la linéarité de l'intégrale pour écrire : $\mathrm{A}(m) = \mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_2$ avec $\mathrm{I}_1 = \displaystyle\int_{m}^{0} \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{I}_2 = \displaystyle\int_{m}^{0} (t+1)\mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t$

$$\mathrm{I}_1 = \left[\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\right]_{m}^{0} = \frac{1-\mathrm{e}^{2m}}{2}$$

Il y a deux méthodes pour calculer $\mathrm{I}_2$ :

**1ère méthode : par intégration directe**

$$\mathrm{I}_2 = \left[t\mathrm{e}^{t}\right]_{m}^{0} = -m\mathrm{e}^{m}$$

**2e méthode : par intégration par parties**

$$\mathrm{I}_2 = \left[(t+1)\mathrm{e}^{t}\right]_{m}^{0} - \int_{m}^{0} \mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t = \cancel{1} - (m+1)\mathrm{e}^{m} - \cancel{1} + \mathrm{e}^{m} = -m\mathrm{e}^{m}$$

$$\boxed{\mathrm{A}(m) = \frac{1-\mathrm{e}^{2m}}{2} + m\mathrm{e}^{m}}$$

c)

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{m \to -\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{2m}}{2} = \frac{1}{2} \\ \displaystyle\lim_{m \to -\infty} \left(-m\mathrm{e}^{m}\right) = 0 \quad \text{(limite de référence)} \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'une somme, on a : } \boxed{\lim_{m \to -\infty} \mathrm{A}(m) = \frac{1}{2}}.$$