TS3

Interrogation écrite
du mardi 6 avril 2010 (50 minutes)

Prénom et nom : .... **Note : …… / 20**

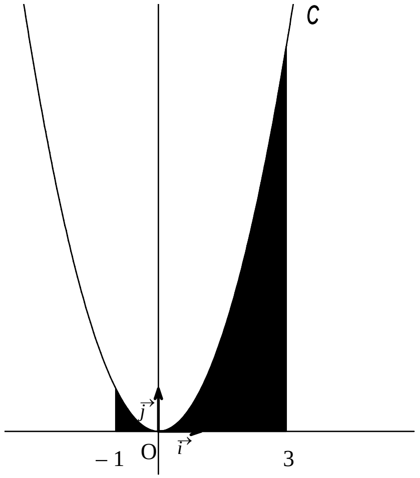
- **Écrire très lisiblement et sans rature à l'encre, en privilégiant une recherche préalable au brouillon.**
- **Faire les traits de fractions et les radicaux à la règle.**

I. (6 points) Soit *f*, *g*, *h* les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{e^x}{1+3e^x}$, $g(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}$, $h(x)=x^2\left(x^3+1\right)^6$.

Compléter sans justifier les phrases ci-dessous.

Une primitive de *f* sur $\mathbb{R}$ est la fonction *F* définie par $F(x)=$..............................
Une primitive de *g* sur $\mathbb{R}$ est la fonction *G* définie par $G(x)=$..............................
Une primitive de *h* sur $\mathbb{R}$ est la fonction *H* définie par $H(x)=$..............................

II. (1 point) On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y=x^2$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ (en unités d'aire) du domaine hachuré. Le détail du calcul n'est pas demandé.

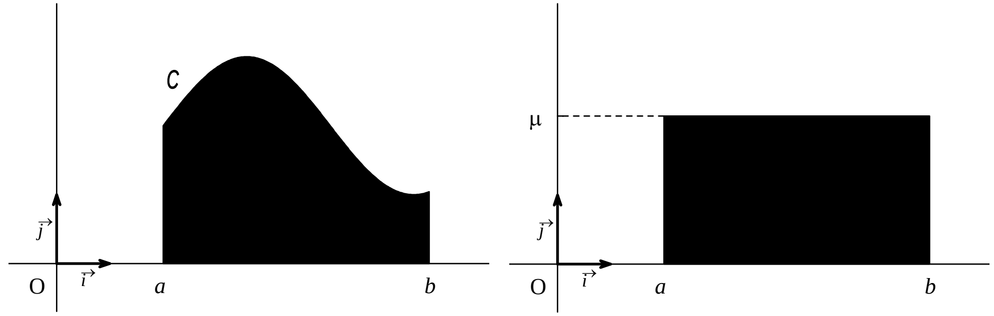


$\mathcal{A}$ = …………….. u.a.

III. (1 point) Soit *f* une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ (*a* et *b* sont deux réels tels que $a<b$). On suppose que *f* est à valeurs positives. On note µ la valeur moyenne de *f* sur $[a, b]$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de *f* dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Que peut-on dire de l'aire du domaine hachuré (aire sous la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[a, b]$) sur le graphique de gauche et de l'aire du rectangle sur le graphique de droite ? On ne demande pas de justifier.



…….

IV. (3 points) Soit *f* une fonction définie et continue sur l'intervalle $[0\,;5]$. On pose :

$\mathrm{I}=\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$; $\mathrm{J}=\int_3^0 f(x)\,\mathrm{d}x$; $\mathrm{K}=\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x$; $\mathrm{L}=\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x$; $\mathrm{M}=\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$; $\mathrm{N}=\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Aucune justification n'est attendue.

1°) Quelle relation peut-on écrire entre I et J ? ……………………………………………

2°) Compléter chaque égalité ci-dessous en utilisant l'une des lettres I, J, K, L, M ou N.

I + K = …………………	I – M = …………………

V. (2 points) Pour cet exercice, aucune rédaction n'est demandée.

On sélectionne les candidats à un jeu télévisé en les faisant répondre à dix questions.
Ils devront choisir, pour chacune des questions, parmi quatre affirmations, celle qui est exacte.
Un candidat se présente et répond à toutes les questions au hasard.
On appelle X la variable aléatoire désignant le nombre de réponses exactes données par ce candidat à l'issue du questionnaire.

1°) Quelle est la loi de probabilité de X ? Répondre avec précision.

…….

2°) Calculer la probabilité pour que le candidat fournisse au moins 8 bonnes réponses, et soit ainsi sélectionné.
Donner une valeur approchée du résultat à 10^{-5} près.

…….

VI. (2 points) Deux chasseurs tirent simultanément sur une cible.
On considère l'événement A : « Le premier chasseur atteint la cible » et l'événement B : « Le deuxième chasseur atteint la cible ».
Exprimer, sans justifier, en fonction de A et B, l'événement E : « La cible est atteinte au moins une fois » et l'événement F : « La cible n'est jamais atteinte ». (Remarque : il n'y a aucun calcul à faire).

E = …………………	F = …………………

VII. (1 point) Lors d'une expérience aléatoire modélisée par une loi de probabilité *P*, on considère deux événements A et B qui vérifient : $P(\mathrm{A}) = 0{,}3$, $P(\mathrm{B}) = 0{,}5$ et $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 0{,}65$.
Les événements A et B sont-ils indépendants pour la loi de probabilité *P* ? Justifier.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

VIII. (4 points) Le plan complexe *P* est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

À tout point M, d'affixe *z*, on associe le point M' d'affixe $z' = z^2 - 4z$.

Soit A le point d'affixe 2.

1°) Déterminer l'affixe du point A' associé au point A.
2°) Démontrer que, pour tout nombre complexe *z*, on a : $z' + 4 = (z-2)^2$.
En déduire une relation entre $|z'+4|$ et $|z-2|$.
3°) On note Γ le cercle de centre A et de rayon 2 et Γ' le cercle de centre A' et de rayon 4.
Démontrer que, si $\mathrm{M} \in \Gamma$, alors $\mathrm{M}' \in \Gamma'$.

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Corrigé de l'interrogation écrite du 6-4-2010

I.

1°) $u(x)=3\text{e}^x+1$; $u'(x)=3\text{e}^x$

$$f=\frac{1}{3}\times\frac{u'}{u}$$

$F(x)=\frac{1}{3}\ln\left|u(x)\right|=\frac{1}{3}\ln\left|1+3\text{e}^x\right|=\frac{1}{3}\ln\left(1+3\text{e}^x\right)$ (on enlève les « valeurs absolues de sécurité car l'expression est strictement positive)

2°) $v(x)=x^2+2x+3$; $v'(x)=2x+2$

$$g=\frac{v'}{2\sqrt{v}}$$

$$G(x)=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{v(x)}=\sqrt{x^2+2x+3}$$

3°) $h(x)=x^2\left(x^3+1\right)^6$

$w(x)=x^3+1$; $w'(x)=3x^2$

$$h=\frac{1}{3}w'w^6$$

$$H(x)=\frac{1}{3}\times\frac{w(x)^7}{7}=\frac{\left(x^3+1\right)^7}{21}$$

II. La fonction f est continue et positive sur l'intervalle [– 1; 3] donc l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ sur cet intervalle est égale à $\mathcal{A}=\int_{-1}^{3}x^2\ \text{d}x=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{3}=\frac{3^3}{3}-\frac{(-1)^3}{3}=\frac{27}{3}+\frac{1}{3}=\frac{28}{3}$ u.a.

Inutile d'appliquer la relation de Chasles en « coupant » l'intégrale en 2.

III. Question de cours

L'aire du domaine hachuré et l'aire du rectangle sont égales (propriété de la valeur moyenne).

Rappel de la démonstration :

$$\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ \text{d}x$$

$$\mu\times(b-a)=\int_a^b f(x)\ \text{d}x$$

L'aire du domaine hachuré est égale à l'aire du rectangle.

IV. Exercice d'application du cours

1°) $\int_3^0 f(x)\ \text{d}x=-\int_0^3 f(x)\ \text{d}x$ donc $\text{J}=-\text{I}$.

2°)

$\text{I}+\text{K}=\int_0^3 f(x)\ \text{d}x+\int_3^5 f(x)\ \text{d}x=\int_0^5 f(x)\ \text{d}x=\text{N}$ (relation de Chasles)

$$\text{I}-\text{M}=\int_0^3 f(x)\ \text{d}x-\int_0^2 f(x)\ \text{d}x=\int_0^3 f(x)\ \text{d}x+\int_2^0 f(x)\ \text{d}x=\int_2^0 f(x)\ \text{d}x+\int_0^3 f(x)\ \text{d}x=\int_2^3 f(x)\ \text{d}x=\text{L}$$

V.

1°) On répète 10 fois successivement, et de manière indépendante, la même épreuve consistant à répondre à une question en choisissant au hasard et de manière équiprobable une réponse parmi les quatre proposées. Chaque épreuve a donc une probabilité de réussite égale à $p=0,25$ et une probabilité d'échec égale à $q=1-p=1-0,25=0,75$.

Le nombre de succès X parmi les 10 répétitions suit donc une loi binomiale de paramètres 10 (nombre d'épreuves) et 0,25 (probabilité d'un succès).

2°) On doit calculer $P(\text{X}\geqslant 8)$.

On peut utiliser directement la calculatrice.

Sinon, on peut écrire cette probabilité comme une somme et on utilise les formules du cours.

$$\begin{aligned}P(\text{X}\geqslant 8)&=P(\text{X}=8)+P(\text{X}=9)+P(\text{X}=10)\\&=\binom{10}{8}0,25^8\times 0,75^2+\binom{10}{9}0,25^9\times 0,75^1+\binom{10}{10}0,25^{10}\times 0,75^0\\&=\frac{10\times 9}{2}\times 0,25^8\times 0,75^2+\frac{10\times 9}{2}\times 0,25^9\times 0,75+0,25^{10}\end{aligned}$$

$$P(\text{X}\geqslant 8)\approx 4,158\times 10^{-4}$$

On peut

VI.

$\text{E}=\text{A}\cup\text{B}$	$\text{F}=\overline{\text{A}}\cap\overline{\text{B}}$

Développer la solution.

VII. On sait que : $P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})-P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$ donc
$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})-P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=0{,}8-0{,}65=0{,}15$.
Or $P(\mathrm{A})\times P(\mathrm{B})=0{,}3\times0{,}5=0{,}15$.

On constate que $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=P(\mathrm{A})\times P(\mathrm{B})$ donc les événements A et B sont indépendants.

VIII.

1°) $z_{\mathrm{A'}}=z_{\mathrm{A}}{}^2-4z_{\mathrm{A}}=4-8=-4$

2°) $z'+4=z^2-4z+4=(z-2)^2$
On prend les modules de chacun des deux membres.
$|\,z'+4\,|=\left|(z-2)^2\right|=|\,z-2\,|^2$ (propriété du module : le module d'un carré est égal au carré du module)

3°) On raisonne en mode déductif (pas par équivalences).
Γ est le cercle de centre A et de rayon 2 donc si $\mathrm{M}\in\Gamma$, alors $\mathrm{AM}=2$, d'où $|\,z_{\mathrm{M}}-z_{\mathrm{A}}\,|=2$ d'où $|\,z-2\,|=2$.
Or $|\,z'+4\,|=|\,z-2\,|^2$ donc $|\,z'+4\,|=2^2=4$
D'où $\mathrm{A'M'}=4$.
Or Γ' est le cercle de centre $\mathrm{A'}$ et de rayon 4.
Donc $\mathrm{M'}\in\Gamma'$.

On peut faire une figure sur laquelle on trace Γ et Γ'.
On peut observer que les cercles Γ et Γ' sont tangents extérieurement.

N.B. : Il y a bien équivalence entre $\mathrm{M}\in\Gamma$ et $\mathrm{M'}\in\Gamma'$ mais l'énoncé ne demandait que de démontrer une implication.

J'aurais pu demander de démontrer que $\mathrm{M}\in\Gamma \Leftrightarrow \mathrm{M'}\in\Gamma'$.
En notant *f* l'application qui à tout point M associe le point $\mathrm{M'}$, j'aurais pu demander si l'image du cercle Γ est le cercle Γ'.

On note Γ le cercle de centre A et de rayon 2 et Γ' le cercle de centre $\mathrm{A'}$ et de rayon 4.
Démontrer que, si $\mathrm{M}\in\Gamma$, alors $\mathrm{M'}\in\Gamma'$.