TS3

Interrogation écrite du lundi 25 mai 2009 sans calculatrice (40 minutes)

Prénom et nom : ……………………………… **Note : …… /20**

Dans les exercices I et II, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

I. (1 point) Soit A, B, C trois points du plan complexe d'affixes respectives *a*, *b*, *c*.
Soit G le barycentre des points pondérés (A ; 4), (B ; – 1), (C ; – 2).
Exprimer l'affixe de G en fonction de *a*, *b*, *c*.

$z_G =$ ……………………….

II. (1 point) Donner une équation paramétrique complexe du cercle Γ de centre $\Omega(1-\mathrm{i})$ et de rayon 2.

……………………………………………………..

III. (2 points) Soit *z* un nombre complexe non nul de module *r* et d'argument θ.
Donner le module et un argument de $\left(\overline{z}\right)^2$.

Le module de $\left(\overline{z}\right)^2$ est égal à ……………

Un argument de $\left(\overline{z}\right)^2$ est égal à ……………

IV. (2 points) Soit *z* et *z'* deux nombres complexes tels que $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $z' = r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}$ où r et r' sont deux réels strictement positifs et θ et θ' deux réels.

Compléter

$z = z' \Leftrightarrow$ ………………………………………..

V. (1 point) La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ? Répondre sans justifier.

Pour tout nombre complexe *z*, on a : $\left|z^2-4\right| = \left|z-2\right| \times \left|z+2\right|$.

VI. (4 points) On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x + 3\mathrm{e}^{-x}$.

Calculer sans calculatrice, en détaillant bien chaque étape, $f(\ln 2)$ et $f\left(-\dfrac{\ln 3}{2}\right)$.

……

……

……

……

VII. (2 points) Déterminer $\lim\limits_{x \to (-1)^+} \ln(x+1)$ et $\lim\limits_{x \to (-1)^+} \left[(x+1)\ln(x+1)\right]$ en détaillant un petit peu les étapes.

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

VIII. (3 points) Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé (Ω, P) suivant la loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0{,}8$.

Comparer $P(X = 3)$ et $P(X = 4)$.

………

………

………

………

………

………

IX. (3 points) On lance plusieurs fois un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On compte le nombre de 6 obtenus.
Combien de fois faut-il lancer le dé pour que l'espérance du nombre de 6 obtenus soit égale à 1 ?
Quel est alors l'écart-type ?

………

………

………

………

………

………

………

………

………

X. (1 point) On pose : $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x \, \mathrm{d}x$ et $\mathrm{J} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x \, \mathrm{d}x$.

Calculer $\mathrm{I} + \mathrm{J}$ (sans calculer les valeurs de I et J).

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

Bonus au choix

1^er^ choix : Calculer $\mathrm{I} = \int_0^2 \left| x^2 - 1 \right| \mathrm{d}x$.

2^e^ choix : Calculer $(2 + \mathrm{i})^5$. Donner le résultat sous forme algébrique.

3^e^ choix : Calculer les intégrales I et J de l'exercice **X**.

………

Corrigé de l'interrogation écrite du 25-5-2009

I. On applique la formule du cours donnant l'affixe d'un barycentre.

$z_G = 4a - b - 2c$

II. Une équation paramétrique complexe du cercle Γ de centre $\Omega(1-\mathrm{i})$ et de rayon 2 s'écrit :

$z = 1 - \mathrm{i} + 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \quad (\theta \in \mathbb{R})$

Ne pas confondre avec équation cartésienne de cercle.
Γ a pour équation : $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$.

III.

Le module de $(\bar{z})^2$ est égal à r^2.

Un argument de $(\bar{z})^2$ est égal à -2θ.

IV.

$z = z' \Leftrightarrow r = r'$ et $\theta = \theta' + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

V. Pour tout nombre complexe z, on a : $|z^2 - 4| = |z-2| \times |z+2|$.
Vrai

On utilise la propriété « Le module d'un produit est égal au produit des modules ».

VI.

$$f(\ln 2) = \mathrm{e}^{\ln 2} + 3\mathrm{e}^{-\ln 2} = 2 + 3\mathrm{e}^{\ln\frac{1}{2}} = 2 + 3 \times \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

$$f\left(-\frac{\ln 3}{2}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{\ln 3}{2}} + 3\mathrm{e}^{\frac{\ln 3}{2}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{\ln 3}{2}}} + 3\mathrm{e}^{\ln\sqrt{3}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln\sqrt{3}}} + 3\mathrm{e}^{\ln\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} + 3\sqrt{3} = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

Pour le deuxième calcul, on utilise la propriété : $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$ (pour tout réel a strictement positif).

VII.

Méthode pour les deux limites : changement de variable.

On pose $X = x + 1$.

$x \to (-1)^+ \Leftrightarrow X \to 0^+$

$\lim\limits_{X \to 0^+} \ln X = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to (-1)^+} \ln(x+1) = -\infty$

On a : $\lim\limits_{X \to 0^+} (X \ln X) = 0$ (limite de référence).
Donc on en déduit que $\lim\limits_{x \to (-1)^+} \left[(x+1)\ln(x+1)\right] = 0$.

VIII.

$$P(\mathrm{X}=3) = \binom{4}{3} \times 0,8^3 \times 0,2^1 = 4 \times 0,8^3 \times 0,2 = 0,8^4$$

$$P(\mathrm{X}=4) = \binom{4}{4} \times 0,8^4 \times 0,2^0 = 1 \times 0,8^4 \times 1 = 0,8^4$$

On en déduit que $P(\mathrm{X}=4) = P(\mathrm{X}=3)$.

IX.

Soit n le nombre de lancers du dé.

On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de 6 obtenus.
X suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{6}$.

$E(\mathrm{X}) = n \times \frac{1}{6}$ soit $E(\mathrm{X}) = \frac{n}{6}$ (formule du cours : espérance mathématique d'une variable aléatoire qui suit la loi binomiale)

On cherche n tel que $E(\mathrm{X}) = 1 \quad (1)$.

$(1) \Leftrightarrow \frac{n}{6} = 1$

$\Leftrightarrow n = 6$

Il faudra lancer le dé 6 fois pour que l'espérance de X soit égale à 1.

L'écart-type est alors égal à $\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{6 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} = \sqrt{\frac{5}{6}}$ (formule du cours : écart-type d'une variable aléatoire qui suit la loi binomiale).

X.

$$\mathrm{I}+\mathrm{J}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x\,\mathrm{d}x \quad \text{(linéarité de l'intégrale)}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\underbrace{\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)}_{1}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\times 1\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2}-0$$

$$=\frac{\frac{\pi^2}{4}}{2}$$

$$=\frac{\pi^2}{8}$$

Bonus au choix

1er choix :

$$\mathrm{I}=\int_0^2 \left|x^2-1\right|\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{I}=\int_0^1 \left(1-x^2\right)\mathrm{d}x+\int_1^2\left(x^2-1\right)\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{I}=\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_1^2$$

$$\mathrm{I}=1-\frac{1}{3}+\left(\frac{8}{3}-2-\frac{1}{3}+1\right)$$

$$\mathrm{I}=\frac{4}{3}+\frac{8}{3}-2$$

$$\mathrm{I}=4-2$$

$$\boxed{\mathrm{I}=2}$$

2e choix :

Le mieux est d'utiliser la **formule du binôme de Newton**.

On commence par écrire le triangle de Pascal.

$$\left(2+\mathrm{i}\right)^5=41\mathrm{i}-38$$

3e choix : Calculer les intégrales I et J de l'exercice **X**.