1[ère] S3 — Devoir pour le mercredi 7 avril 2010

I. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x + \sin 3x = 0$ (E).

Représenter sur le cercle trigonométrique les images des solutions.
Donner les solutions de (E) dans l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.

II. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$.

1°) Etudier la parité et la périodicité de f.
En déduire qu'il suffit d'étudier la fonction f sur l'intervalle $\text{I} = [0 ; \pi]$.

2°) Démontrer que, pour tout réel x, on a $f'(x) = \dfrac{2\cos x + 1}{(2 + \cos x)^2}$.

3°) Résoudre dans l'intervalle I à l'aide du cercle trigonométrique les inéquations et l'équation ci-dessous.

$2\cos x + 1 > 0$ (1)	$2\cos x + 1 < 0$ (2)	$2\cos x + 1 = 0$ (3)

(Il n'est pas demandé de donner les ensembles de solutions.)

4°) Faire un tableau récapitulatif comprenant :
- l'étude du signe de $f'(x)$ pour $x \in \text{I}$;
- les variations de f sur I.

Calculer les extremums locaux (valeurs exactes) ainsi que la valeur de $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

5°) Tracer la représentation graphique de f sur l'intervalle I dans le plan muni d'un repère orthogonal $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\|\vec{i}\| = 1\text{ cm}$ et $\|\vec{j}\| = 3\text{ cm}$.
On commencera par placer les points correspondants aux extremums locaux de f sur I.
Tracer des pointillés et marquer leurs coordonnées sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées.
Tracer les tangentes horizontales en ces points.
Compléter la représentation graphique pour obtenir la représentation graphique sur l'intervalle $[-2\pi ; 2\pi]$.
Vérifier le tracé à l'aide d'un logiciel de tracé de courbe sur ordinateur ou d'une calculatrice graphique (attention à penser à mettre la calculatrice en mode radian si elle n'y est pas déjà).

III. Soit A et B deux points du plan P tels que $\text{AB} = 6$.
Déterminer suivant les valeurs du réel k l'ensemble E_k des points M du plan P tels que l'on ait $\text{MA}^2 + \text{MB}^2 = k$.

On rédigera clairement la recherche :

$\text{M} \in E_k \Leftrightarrow \ldots\ldots$

$\Leftrightarrow \ldots\ldots$

On conclura en faisant une discussion sur k.

IV. Dans le plan P muni d'un repère orthonormé $(\text{O}, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $\text{A}(1 ; 2)$ et $\text{B}(3 ; 3)$.

Déterminer l'ensemble E des points $\text{M}(x ; y)$ tels que l'on ait : $\text{MA}^2 - 2\text{MB}^2 + 3\text{MO}^2 = -\dfrac{99}{2}$.

$1^{\text{ère}}$ S3 — Correction du devoir pour le 7 avril 2010

I. $1^{\text{ère}}$ méthode :

(E) $\Leftrightarrow \cos x = -\sin 3x$

$\Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}+3x\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2}+3x+2k\pi \ (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = -\left(\dfrac{\pi}{2}+3x\right)+2k'\pi \ \ (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{4}-k\pi \ (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{\pi}{8}+k'\dfrac{\pi}{2} \ \ (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

2^{e} méthode :

(E) $\Leftrightarrow \cos x = -\sin 3x$

$\Leftrightarrow \sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) = \sin(-3x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{\pi}{2} = -3x+2k\pi \ (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x+\dfrac{\pi}{2} = \pi+3x+2k'\pi \ \ (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{8}+k\dfrac{\pi}{2} \ (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{\pi}{4}-k'\pi \ \ (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

Les solutions de (E) dans $\mathbb{R}$ sont les réels de la forme $-\dfrac{\pi}{4}-k\pi \ \ (k\in\mathbb{Z})$ ou $-\dfrac{\pi}{8}+k'\dfrac{\pi}{2}$.

$$\boxed{S=\left\{-\frac{\pi}{4}-k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{8}+k'\frac{\pi}{2},\ k'\in\mathbb{Z}\right\}}$$

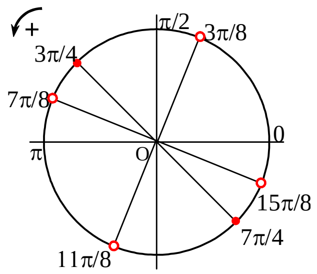
On peut aussi écrire : $S=\left\{-\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\dfrac{\pi}{8}+k'\dfrac{\pi}{2},\ k'\in\mathbb{Z}\right\}$

Solutions de (E) dans $[0\ ;\ 2\pi]$

(1) : $-\dfrac{\pi}{4}-k\pi\in[0\ ;\ 2\pi]$ pour $k=-1$ ce qui donne $x=\dfrac{3\pi}{4}$, ou, pour $k=-2$ ce qui donne $x=\dfrac{7\pi}{4}$;

(2) : $-\dfrac{\pi}{8}+k'\dfrac{\pi}{2}\in[0\ ;\ 2\pi\ ]$ pour $k=1$ ce qui donne $\dfrac{3\pi}{8}$, pour $k=2$ ce qui donne $x=\dfrac{7\pi}{8}$, ou, pour $k=3$ ce qui donne $x=\dfrac{11\pi}{8}$, ou, pour $k=4$ ce qui donne $x=\dfrac{15\pi}{8}$

Les solutions de (E) dans $[0\ ;\ 2\pi]$ sont donc : $\dfrac{3\pi}{8}$, $\dfrac{3\pi}{4}$, $\dfrac{7\pi}{8}$, $\dfrac{11\pi}{8}$, $\dfrac{7\pi}{4}$ et $\dfrac{15\pi}{8}$.



II. $f(x)=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$

1°)

Le domaine de définition de *f* est $\mathbb{R}$ donc il est centré en 0.

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f(-x)=\dfrac{\sin(-x)}{2+\cos(-x)}=-\dfrac{\sin x}{2+\cos x}=-f(x)$

On en déduit que *f* est impaire.

$\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x+2\pi)=\dfrac{\sin(x+2\pi)}{2+\cos(x+2\pi)}=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}=f(x)$

On en déduit que *f* est périodique de période 2π.

f est périodique de période 2π donc on peut réduire son domaine d'étude à un intervalle de longueur 2π soit]– π ; π].
De plus, comme *f* est impaire, on peut réduire alors le domaine d'étude à I = [0 ; π].

2°) *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ ($u : x \mapsto \sin x$ et $v : x \mapsto 2+\cos x$)

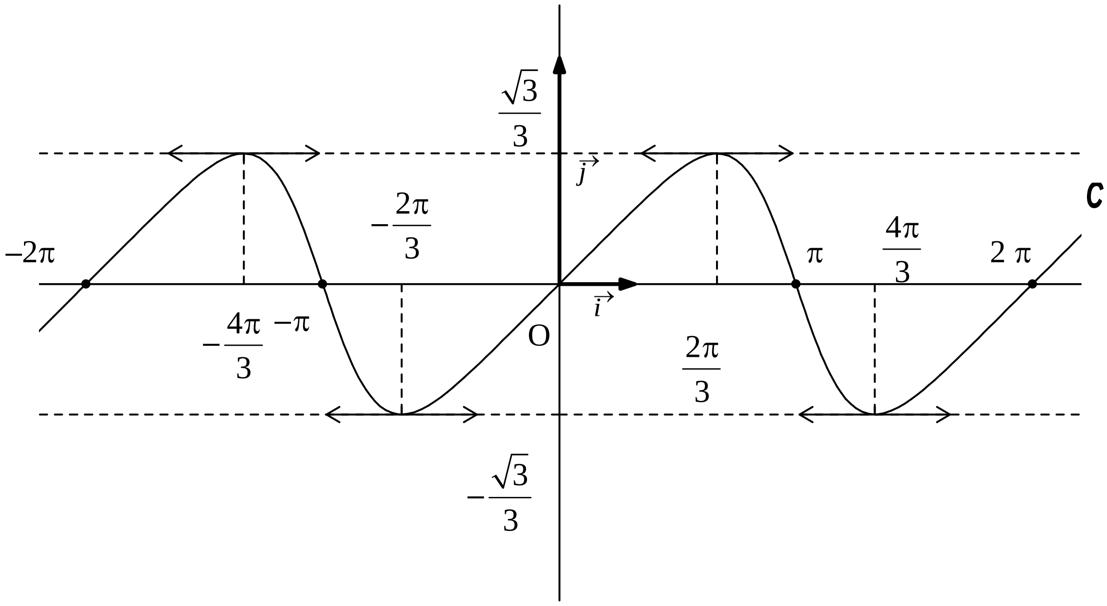
$\forall x\in\mathbb{R} \quad f'(x)=\dfrac{\cos x\times(2+\cos x)-\sin x\times(-\sin x)}{(2+\cos x)^2}=\dfrac{2\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{(2+\cos x)^2}=\dfrac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}$

3°)

$2\cos x+1>0$ (1)	$2\cos x+1<0$ (2)	$2\cos x+1=0$ (3)
$\cos x>-\dfrac{1}{2}$	$\cos x<-\dfrac{1}{2}$	$\cos x=-\dfrac{1}{2}$
$0\le x<\dfrac{2\pi}{3}$	$\dfrac{2\pi}{3}<x\le\pi$	$x=\dfrac{2\pi}{3}$

x	0		$\dfrac{2\pi}{3}$		π
Signe de $2\cos x+1$		$+$	0	$-$	
Signe de $(2+\cos x)^2$		$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de *f*	0	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	0

$f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=\dfrac{\sin\dfrac{2\pi}{3}}{2+\cos\dfrac{2\pi}{3}}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$



III. $AB = 6$

$E_k = \left\{ M \in P \,/\, MA^2 + MB^2 = k \right\}$.

Déterminons suivant les valeurs du réel *k* l'ensemble E_k.

1ère étape : réduction de la somme du membre de gauche

Soit I le milieu du segment [AB].

D'après la formule de la médiane, $\forall M \in P \quad MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$.

Or $AB = 6$ donc $\forall M \in P \quad MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 18$.

2e étape : recherche de l'ensemble E_k

$$\begin{aligned} M \in E_k &\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 = k \\ &\Leftrightarrow 2MI^2 + 18 = k \\ &\Leftrightarrow MI^2 = \frac{k-18}{2} \end{aligned}$$

3e étape : nature de l'ensemble E_k suivant les valeurs de *k*

On regarde le signe de $\frac{k-18}{2}$.

Discussion sur *k*

- Si $k < 18$, alors $\dfrac{k-18}{2} < 0$.

  Dans ce cas, $E_k = \varnothing$.

- Si $k > 18$, alors $\dfrac{k-18}{2} > 0$.

  Dans ce cas, $\mathrm{M} \in E_k \Leftrightarrow \mathrm{MI} = \sqrt{\dfrac{k-18}{2}}$

  E_k est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\dfrac{k-18}{2}}$.

- Si $k = 18$, alors $\dfrac{k-18}{2} = 0$.

  Dans ce cas, $\mathrm{M} \in E_k \Leftrightarrow \mathrm{MI} = 0$

  $\Leftrightarrow \mathrm{M} = \mathrm{I}$

  E_{18} est le singleton $\{\mathrm{I}\}$.

IV. Soit M (x ; y) un point quelconque du plan.

$$\mathrm{MA}^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5$$
$$\mathrm{MB}^2 = (x-3)^2 + (y-3)^2 = x^2 + y^2 - 6x - 6y + 18$$
$$\mathrm{MO}^2 = x^2 + y^2$$

Donc pour tout point $\mathrm{MA}^2 - 2\mathrm{MB}^2 + 3\mathrm{MO}^2 = 2\left(x^2 + y^2\right) + 10x + 8y - 31$

$$\begin{aligned}\mathrm{M} \in E &\Leftrightarrow 2\left(x^2 + y^2\right) + 10x + 8y - 31 = -\frac{99}{2}\\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 5x + 4y + \frac{37}{4} = 0\\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y+2)^2 = 1\end{aligned}$$

Conclusion :

E est le cercle de centre $\omega\left(\dfrac{5}{2},\ -2\right)$ et de rayon 1.

VI. On considère la fonction $f : x \mapsto x - 3 + \dfrac{1}{x}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Pour tout réel *m*, on note D_m la droite d'équation $y = m$.

Travail informatique sur *Geogebra*

1°) Dans *Saisie* (en bas de la figure), commencer par définir la fonction *f*.
2°) Définir un paramètre réel *m* à l'aide du bouton Curseur (6^{e} colonne de boutons en partant de la gauche).
Il faut cliquer à un endroit quelconque de la figure.
On prendra –20 et 20 pour bornes de *m*.
N.B. : le paramètre est noté *a* ; il faut le renommer *m*.
3°) Pour tracer la droite D_m, taper dans *Saisie* : $y = m$. Appuyer sur *Entrée*.
4°) Définir le point M comme l'un des points d'intersection de la droite D_m et de la courbe $\mathcal{C}$ lorsqu'il existe.
Pour cela, cliquer sur l'icône permettant de définir un point (2^{e} bouton en partant de la gauche), aller dans *Intersection entre deux objets* ; cliquer alors sur la droite D_m et sur la courbe $\mathcal{C}$.
Le point d'intersection est nommé A ; renommer ce point M.
Définir de même le point N comme deuxième point d'intersection de la droite D_m et de la courbe $\mathcal{C}$.
5°) Définir le point I, milieu du segment [MN].
Pour cela, cliquer sur l'icône permettant de définir un point (2^{e} bouton en partant de la gauche), sélectionner *Milieu ou centre* ; cliquer alors sur les extrémités M et N du segment dont on veut obtenir le milieu.
Un point I se place alors au milieu du segment [MN] ; cliquer sur ce point et sélectionner *Renommer* pour l'appeler I.
6°) Changer la valeur de *m* à l'aide du curseur. Pour cela, cliquer sur le bouton *Déplacer* (1^{er} bouton en partant de la gauche) puis retourner sur le curseur en cliquant dessus.
Cliquer sur le point I et sélectionner le mode *Trace activée*.

Conjecturer alors :
- le nombre de points d'intersection de D_m et $\mathcal{C}$ suivant les valeurs de *m* ;
- l'ensemble décrit par le point I.

Refaire le travail précédent sans lire les indications.

Travail mathématique sur papier

1°) Former une équation du second degré vérifiée par les abscisses des points d'intersection éventuels de $\mathcal{C}$ et de la droite D_m suivant les valeurs de *m*.
2°) Déterminer le nombre de points d'intersection éventuels de $\mathcal{C}$ et de la droite D_m suivant les valeurs de *m*.
On fera une conclusion claire en discutant suivant les valeurs de *m*.
3°) Lorsque la droite D_m coupe la courbe $\mathcal{C}$ en deux points M et N, éventuellement confondus, on note I le milieu de [MN].
a) Calculer l'abscisse x_{I} du point I (on ne demande pas de calculer les coordonnées de M et N ; on pensera à utiliser la formule donnant la somme des racines d'une équation du second degré).
b) Donner l'ordonnée y_{I} de I en fonction de *m*.
c) Déduire des deux questions précédentes une relation liant les coordonnées de I ; en déduire l'ensemble des points I.

VI.

Travail mathématique sur papier

1°) $x-3+\frac{1}{x}=m$; $x^2-3x+1=mx$; $x^2-(m+3)x+1=0$ (E)

2°) $\Delta=(m+3)^2-4=(m+5)(m+1)$

3°) a) $x_{\mathrm{I}}=\frac{m+3}{2}$ b) $\mathrm{I}\in D_m$ donc $y_{\mathrm{I}}=m$.

c) On a : $x_{\mathrm{I}}=\frac{y_{\mathrm{I}}+3}{2}$ soit $2x_{\mathrm{I}}-y_{\mathrm{I}}-3=0$.

I appartient à la droite Δ d'équation $2x-y-3=0$.

L'ensemble des points I est la réunion de deux demi-droites.