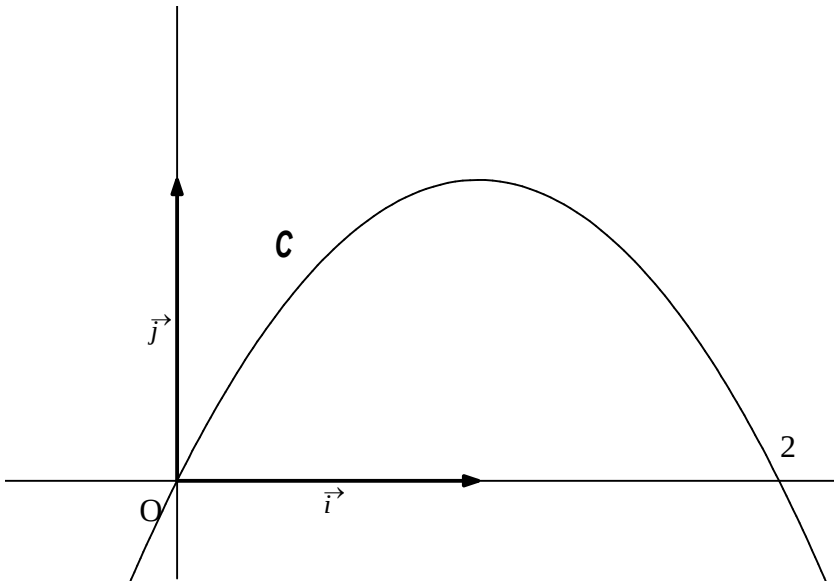
TS3 **Devoir pour le mardi 6 avril 2010**

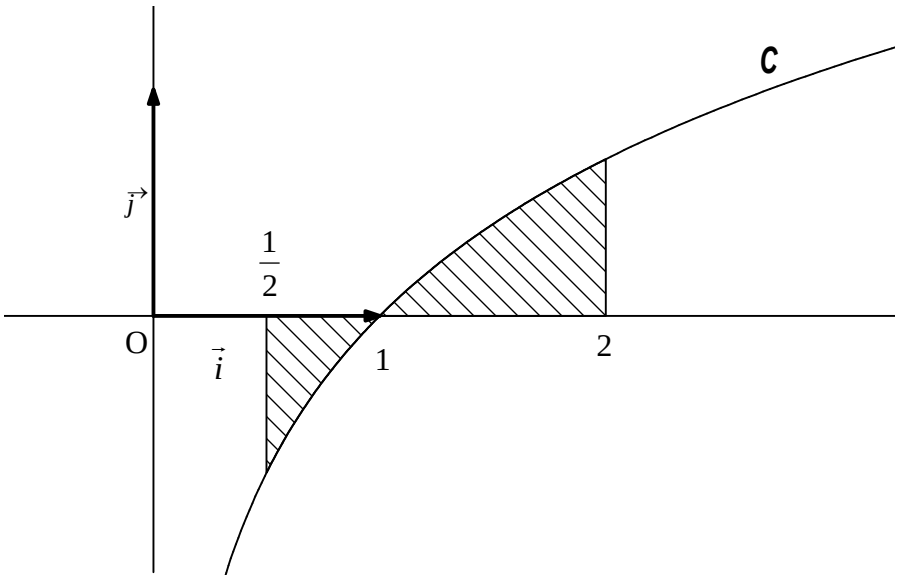
I. On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction $f : x \mapsto 2x - x^2$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Calculer l'aire $\mathcal{A}$ (en unités d'aire) de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses.
Hachurer le domaine sur la figure ci-dessous.



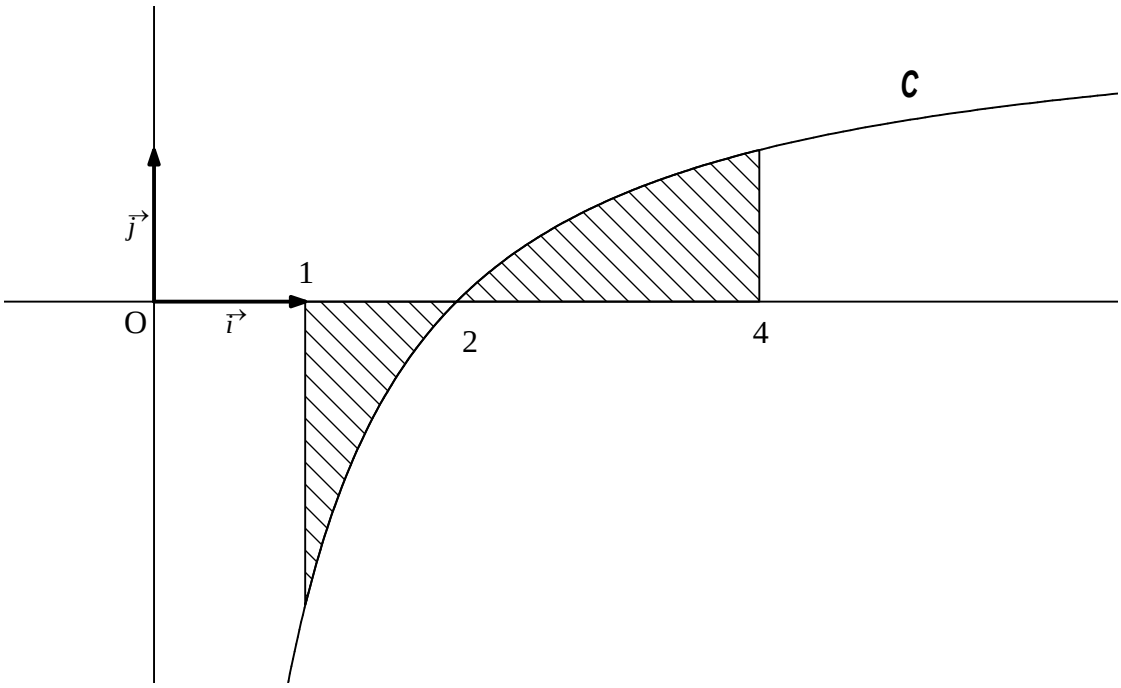
II. On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction $f : x \mapsto \ln x$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Calculer l'aire $\mathcal{A}$ (en unités d'aire) de la partie hachurée.



III. On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x-4}{x}$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

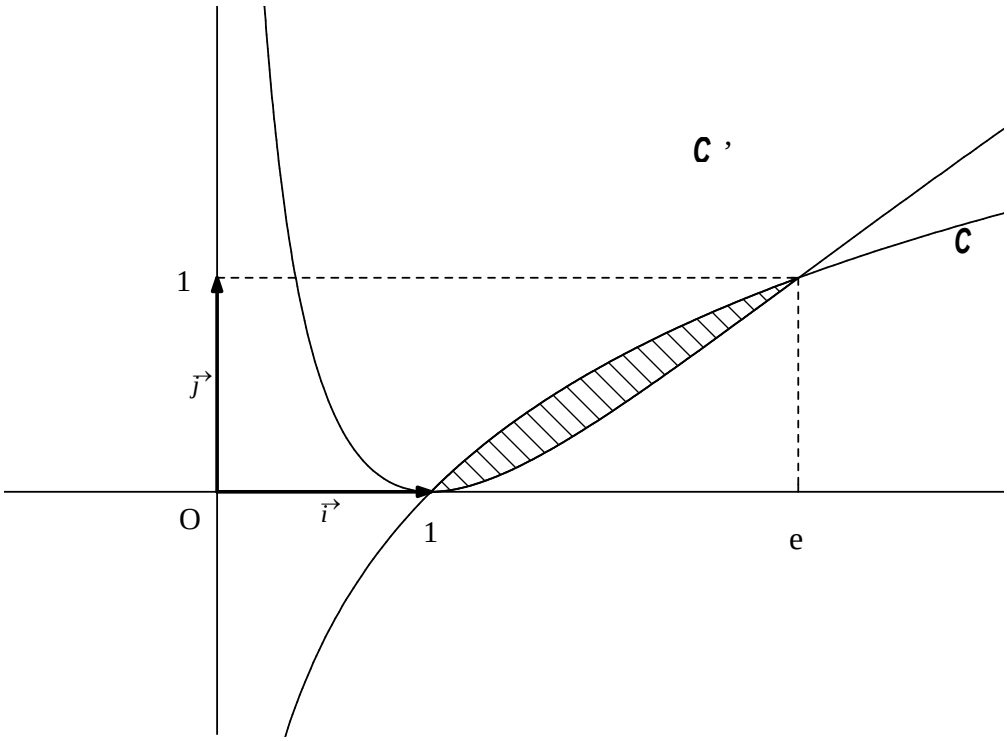
Calculer l'aire $\mathcal{A}$ (en unités d'aire) de la partie hachurée.



IV. On donne ci-dessous les courbes représentatives $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ respectives des fonctions $f : x \mapsto \ln x$ et $g : x \mapsto (\ln x)^2$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Calculer $\mathrm{I}_1 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{I}_2 = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} g(x)\,\mathrm{d}x$.

2°) En déduire l'aire $\mathcal{A}$ (en unités d'aire) de la partie hachurée.



TS3

Correction du devoir pour le mardi 6 avril 2010

I. f est continue et positive ou nulle sur l'intervalle $[0\,;2]$ donc l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses est donnée par :

$$\mathcal{A} = \int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x$$

……..

$$\mathcal{A} = \frac{4}{3} \text{ u.a.}$$

N.B. : Le domaine limitée par la courbe $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses est défini par le système d'inéquations $\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2x - x^2 \end{cases}$.

II. Le domaine considéré est la réunion de deux domaines : le domaine limité par la courbe et l'axe des abscisses sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$; le domaine limité par la courbe et l'axe des abscisses sur l'intervalle $[1\,;2]$.

L'aire du domaine hachuré est la somme des aires de ces deux domaines.
f est continue sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;2\right]$; f est négative ou nulle sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$ et positive ou nulle sur l'intervalle $[1\,;2]$ donc l'aire du domaine hachuré est donnée par :

$$\mathcal{A} = -\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 \text{ avec } \mathrm{I}_1 = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\ \mathrm{d}x \text{ et } \mathrm{I}_2 = \int_1^2 f(x)\ \mathrm{d}x.$$

Pour le calcul de I_1 et de I_2, on utilise le fait qu'une primitive de la fonction ln sur l'intervalle] 0 ; +∞ [est la fonction F : $x \mapsto x\ln x - x$ (résultat qui n'est pas exigible mais qu'il est conseillé de savoir).
Sinon, on peut utiliser une IPP pour chacune des deux intégrales.

$$\mathrm{I}_1 = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln x\ \mathrm{d}x = \left[x\ln x - x\right]_{\frac{1}{2}}^1 = \ldots = -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{I}_2 = \int_1^2 f(x)\ \mathrm{d}x = \int_1^2 \ln x\ \mathrm{d}x = \left[x\ln x - x\right]_1^2 = \ldots = 2\ln 2 - 1 \quad (\text{on utilise } \ln 4 = 2\ln 2)$$

$$\mathcal{A} = -\left(\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\right) + 2\ln 2 - 1$$

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{3\ln 2 - 1}{2} \text{ u.a.}}$$

III. f est continue sur l'intervalle [1 ; 4] ; f est négative ou nulle sur l'intervalle [1 ; 2] et positive ou nulle sur l'intervalle [2 ; 4] donc l'aire du domaine hachuré est donnée par la formule :

$\boldsymbol{A} = -\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2$ avec $\mathrm{I}_1 = \int_1^2 f(x)\ \mathrm{d}x$ et $\mathrm{I}_2 = \int_2^4 f(x)\ \mathrm{d}x$.

On calcule séparément I_1 et I_2.

$$\mathrm{I}_1 = \int_1^2 f(x)\ \mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{2x-4}{x}\ \mathrm{d}x = \int_1^2 \left(2-\frac{4}{x}\right)\ \mathrm{d}x = \left[2x - 4\ln x\right]_1^2 = \ldots = 2 - 4\ln 2$$

$$\mathrm{I}_2 = \int_2^4 f(x)\ \mathrm{d}x = \int_2^4 \frac{2x-4}{x}\ \mathrm{d}x = \int_2^4 \left(2-\frac{4}{x}\right)\ \mathrm{d}x = \left[2x - 4\ln x\right]_2^4 = \ldots = 4 - 4\ln 2 \quad \text{(on utilise } \ln 4 = 2\ln 2\text{)}$$

$\boldsymbol{A} = -(2 - 4\ln 2) + 4 - 4\ln 2$

$\boxed{\boldsymbol{A} = 2 \text{ u.a.}}$

IV.

1°) $\mathrm{I}_1 = \int_1^{\mathrm{e}} \ln x\ \mathrm{d}x = \left[x\ln x - x\right]_1^{\mathrm{e}} = 1$

On peut utiliser directement que la fonction $x \mapsto x\ln x - x$ est une primitive de la fonction ln.
Sinon, on fait une intégration par parties.

2°) $\mathrm{I}_2 = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2\ \mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^2 \times 1\ \mathrm{d}x = \left[x(\ln x)^2\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} 2\ln x\ \mathrm{d}x = \mathrm{e} - 2\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\ \mathrm{d}x = \mathrm{e} - 2\mathrm{I}_1 = \mathrm{e} - 2$

IPP

$u(x) = (\ln x)^2 \qquad v'(x) = 1$

$u'(x) = 2\frac{1}{x} \times \ln x \qquad v(x) = x$

$\boldsymbol{A} = \mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_2$

$\boldsymbol{A} = 1 - (\mathrm{e} - 2)$

$= 3 - \mathrm{e}$

$\boxed{\boldsymbol{A} = 3 - \mathrm{e} \text{ u.a.}}$

N.B. : La partie hachurée est définie par le système d'inéquations $\begin{cases} 1 \le x \le \mathrm{e} \\ (\ln x)^2 \le y \le \ln x \end{cases}$.