$1^{\text{ère}}$ S3 **Devoir pour le lundi 29 mars 2010**

I. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
2°) Dresser le tableau de variation de f.
3°) Déterminer les limites de f en $+\infty$, en $-\infty$ et en 0.
Que peut-on déduire pour $\mathcal{C}$ de l'étude du comportement de f en 0 ?
Compléter le tableau de variations précédent avec les limites.
4°) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet une droite Δ dont on donnera l'équation réduite pour asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$. Etudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ.
5°) Etudier la parité de f ; que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}$?
6°) Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

x	0 ,2	0,5	1	2	4	5	10
$f(x)$							

Faire un graphique sur une feuille à petits carreaux.
Mettre en place le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ en prenant le centimètre pour unité de longueur.
Tracer la droite Δ ; placer les points correspondants au tableau de valeurs ci-dessous.
Tracer $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$; on soignera particulièrement le tracé des branches infinies de la courbe $\mathcal{C}$.
Compléter le tracé par symétrie sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$.
Vérifier le tracé sur l'écran d'une calculatrice graphique ou d'un ordinateur grâce à un logiciel de tracé de courbe.

Tracer les tangentes aux points A et B de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives -1 et 1.

II. Une droite D de l'espace coupe un plan P en un point O.
Soit A et B deux points de D tels que O soit entre A et B.
Soit M un point de l'espace tel que la droite (MA) coupe P en I et (MB) coupe P en J.
1°) Faire une figure correspondant à l'énoncé.
2°) Justifier que les points O, I, J appartiennent au plan (MAB).
3°) Les points O, I, J sont-ils alignés ? Justifier avec rigueur.

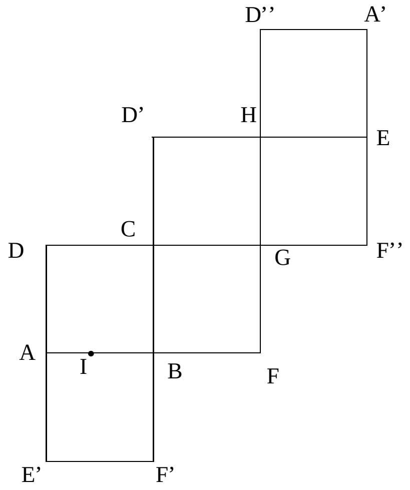
III. Soit ABCDEFGH un cube d'arête a $\left(a \in \mathbb{R}_+^*\right)$.
1°) Déterminer la position relative des plans (BEG) et (ACH). Citer le théorème utilisé.

2°) Soit I un point quelconque de]AB[. On note P le plan passant par I et parallèle au plan (BEG).

Déterminer la position relative des plans P et (ACH). Citer le théorème utilisé.

3°) Tracer la section IJKLMN du cube par le plan P $\left(\mathrm{J} \in \left]\mathrm{AE}\right[\right)$.

Reproduire le patron du cube ci-après et tracer en rouge les côtés de la section ; en déduire que le périmètre de cette section ne dépend pas de la position du point I sur]AB[et exprimer sa valeur en fonction de a.



IV. Le plan orienté P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On note $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique ($\mathcal{C}$ a pour centre O et pour rayon 1). Soit M un point de $\mathcal{C}$ admettant le couple $(1, x)$ pour système de coordonnées polaires.
Pour chacun des cas suivants, placer les points M sur le cercle $\mathcal{C}$ en tenant compte de la condition donnée.

1°) $3x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

2°) $4x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

V. 1°) Développer $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$. En déduire une autre expression de cos $2x$ + sin $2x$.

2°) a) A l'aide de la question précédente, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos^2 x - \sin^2 x + 2\sin x \cos x + 1 = 0$ (E).
b) Placer les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

VI. **La « section impossible »** (exercice facultatif à ne pas chercher plus de 40 minutes !)

Soit ABCDEFGH un cube et I, J, K trois points appartenant respectivement à $\left]\mathrm{AE}\right[$, $\left]\mathrm{BC}\right[$, $\left]\mathrm{GH}\right[$.
Tracer la section du cube par le plan (IJK).

On pourra éventuellement s'aider de *Geospace*.

VII. **Exercice facultatif**

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{2n} = u_n$ et $u_{2n+1} = 1 - u_n$.
Calculer u_{2006}.

1$^{\text{ère}}$ S3 **Correction du devoir pour le lundi 29 mars 2010**

I. $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$

1°) f est une fonction rationnelle donc f est dérivable sur son ensemble de définition.

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2}$

2°)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
SGN de $f'(x)$	+	||	+
Variations de f	$-\infty \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow +\infty$

3°)

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0 \end{array}\right\}$ donc d'après la règle de limite d'une somme, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

De même, on trouve $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to0^+} (1) = 1 \\ \lim\limits_{x\to0^+} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = -\infty \end{array}\right\}$ donc d'après la limite d'une somme, on obtient $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$.

De même, on trouve $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = +\infty$ donc $\mathcal{C}$ admet la droite d'équation x=0 (c'est-à-dire l'axe des ordonnées) pour asymptote verticale.

4°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[f(x) - x\right] = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0$

On en déduit que $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation réduite $y = x$ pour asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$.

5°) $\mathcal{D} = \mathbb{R}^*$ donc $\mathcal{D}$ est centré en 0.

$$\forall x \in \mathcal{D} \quad f(-x) = -x + \frac{1}{x} = -f(x)$$

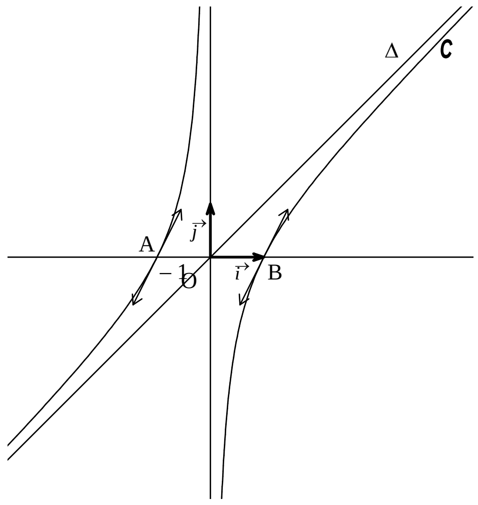
On en déduit que f est impaire donc $\mathcal{C}$ admet le point O, origine du repère, pour centre de symétrie.

6°)

x	0 ,2	0,5	1	2	4	5	10
$f(x)$	– 4,8	–1,5	0	1,5	3,75	4,8	9,9

Pour le tracé de la courbe

- On commence par mettre en place le repère.
- On trace les asymptotes : l'asymptote verticale est déjà tracée ; on trace l'asymptote oblique Δ.
- On place les points correspondants au tableau de valeurs.
- Il n'y pas de tangente horizontale à tracer car la dérivée de f ne s'annule pas.



$\mathcal{C}$ admet l'origine du repère pour centre de symétrie.

$f'(1) = f'(-1) = 2$ donc les tangentes aux points A et B de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives –1 et 1 ont pour coefficient directeur 2 ce qui permet de les tracer sur le graphique (on peut noter que comme elles ont le même coefficient directeur, elles sont parallèles entre elles).

II.

Faire une figure en prenant le plan P horizontal, A en dessous de P et B au dessus de P.

Dans tout cet exercice, attention aux notations : un plan défini par trois points est noté avec des parenthèses.

1°)

2°) O∈(AB) et (AB) ⊂ (MAB) donc O∈(MAB)
I∈(MA) et (MA) ⊂ (MAB) donc I∈(MAB)
J∈(MB) et (MB) ⊂ (MAB) donc J∈(MAB)

3°) **Remarque pour commencer :** on ne peut pas voir l'alignement des points O, I, J sur la figure.

Soit Δ la droite d'intersection des plans *P* et (MAB).

O$\in$ *P* et O$\in$(MAB) donc O$\in\Delta$
I$\in$ *P* et I$\in$(MAB) donc I$\in\Delta$
J$\in$ *P* et J$\in$(MAB) donc J$\in\Delta$
On en déduit que O, I, J appartiennent à la droite Δ ; ils sont donc alignés sur la droite Δ.

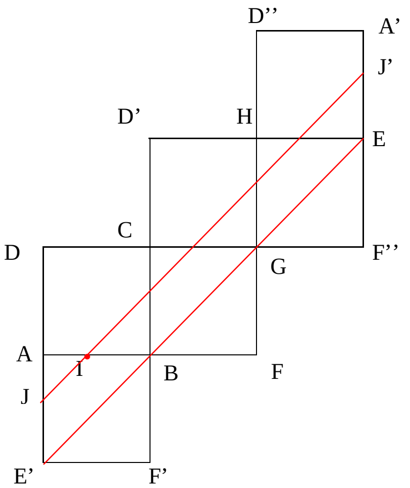
III. 1°) On a : (EB) // (CH) et (BG) // (AH).

Or, si deux droites d'un plan sont parallèles à deux droites sécantes d'un autre plan, alors ces plans sont parallèles.

On en déduit que (BEG) // (ACH).

2°) On sait que *P* // (BEG) d'après les hypothèses et (BEG) // (ACH) d'après la question 1°).
Or si deux plans sont parallèles à un même troisième, alors ces deux plans sont parallèles.
On en déduit que (BEG) // (ACH).

3°)



Le quadrilatère EE'JJ' est un parallélogramme car ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.

On en déduit que JJ' = EE'.

Or $\text{EE}'=\text{EG}+\text{GB}+\text{BE}'=a\sqrt{2}+a\sqrt{2}+a\sqrt{2}=3a\sqrt{2}$

Rappel : La diagonale d'un carré de côté *a* mesure $a\sqrt{2}$.

On en déduit que le périmètre de la section du cube par le plan *P* a un périmètre constant égal à $3a\sqrt{2}$.

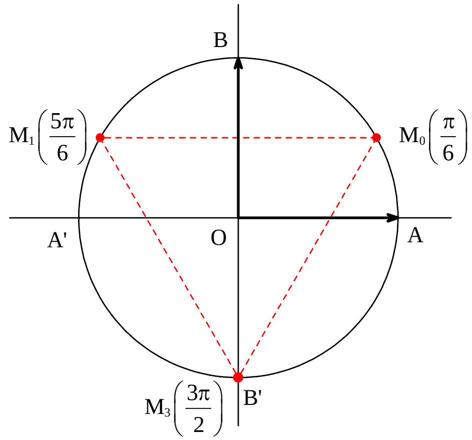
Le périmètre ne dépend pas de la position de I sur]AB[.

IV.

1°) $3x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \iff x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2k\pi}{3}$

- Pour $k=0$, $x=\dfrac{\pi}{6}$
- Pour $k=1$, $x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{5\pi}{6}$
- Pour $k=2$, $x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{4\pi}{3}=\dfrac{9\pi}{6}=\dfrac{3\pi}{2}$.

On place les points M_0, M_1, M_2, images respectives sur le cercle trigonométrique de $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{5\pi}{6}$, $\dfrac{3\pi}{2}$.
La figure formée par ces points est un triangle équilatéral (c'est-à-dire que $M_0M_1M_2$ est un triangle équilatéral).



2°) $4x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \iff x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{4}$

- Pour $k=0$, $x=\dfrac{\pi}{8}$
- Pour $k=1$, $x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{8}$
- Pour $k=2$, $x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{5\pi}{8}$
- Pour $k=3$, $x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{7\pi}{8}$

On place les points M_0, M_1, M_2, M_3 images respectives sur le cercle trigonométrique de $\dfrac{\pi}{8}$, $\dfrac{3\pi}{8}$, $\dfrac{5\pi}{8}$, $\dfrac{7\pi}{8}$.

$M_0M_1M_2M_3$ est un carré.

V. 1°) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos 2x\ \cos\frac{\pi}{4}+\sin 2x\ \sin\frac{\pi}{4}=\cos 2x\ \frac{\sqrt{2}}{2}+\sin 2x\ \frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2x+\sin 2x)$

On en déduit que : $\boxed{\cos 2x+\sin 2x=\frac{2}{\sqrt{2}}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\ \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)}$

2°) a) Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos^2 x-\sin^2 x+2\sin x\ \cos x+1=0$ (E)

(E) $\Leftrightarrow \cos 2x+\sin 2x+1=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\ \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-1$

$\Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{3\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 2x-\frac{\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4}+2k'\pi\ \ (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=\pi+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 2x=-\frac{\pi}{2}+2k'\pi\ \ (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ x=-\frac{\pi}{4}+k'\pi\ \ (k'\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\boxed{S=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{4}+k'\pi,\ k'\in\mathbb{Z}\right\}}$$