TS3

Interrogation écrite du mardi 23 mars 2010 (50 minutes)

Prénom et nom : ………………………………………………… **Note : ……/20**

- **Écrire très lisiblement et sans ratures à l'encre, en privilégiant une recherche préalable au brouillon.**
- **Tirer les traits de fractions à l'aide de la règle.**
- **Encadrer tous les résultats en rouge à la règle.**

I. (1 point) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(1+\mathrm{i})z=(1-\mathrm{i})^2$ (E).

- On démarrera directement en rédigeant ainsi : (E) $\Leftrightarrow$ …

  $\Leftrightarrow$ …

- On conclura ainsi : « Soit S l'ensemble des solutions de (E). $S=\ldots.$ ».

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

II. (4 points) 1°) Soit x et y deux réels.

a) Développer le produit ci-dessous de manière « intelligente ». Donner le résultat sous forme algébrique.

$(x+\mathrm{i}y)\left[x-\mathrm{i}(y-1)\right]=$ .... (mettre juste le résultat sans détailler aucun calcul)

b) Donner une autre expression du produit ci-dessous. Donner le résultat sous une forme non développée.

$\left[x+\mathrm{i}(y-1)\right]\left[x-\mathrm{i}(y-1)\right]=$ .... (mettre juste le résultat sans détailler aucun calcul)

2°) Pour tout nombre complexe $z\neq\mathrm{i}$, on pose $Z=\dfrac{z}{z-\mathrm{i}}$.

On pose $z=x+\mathrm{i}y$, x et y étant deux réels tels que $(x\,;y)\neq(0\,;1)$.

Exprimer Re Z et Im Z en fonction de x et de y.
On pourra utiliser les résultats du 1°).

Tirer les traits de fractions à l'aide de la règle.

Re $Z=$ ....
Im $Z=$ ....

Dans les exercices III à V, le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\vec{u},\vec{v}\right)$.

Pour tous ces exercices, on commencera par faire une recherche au brouillon.

III. (3 points) Déterminer l'ensemble E des points M du plan d'affixe $z=x+\mathrm{i}\,y$, avec x et y réels, tels que z^2 soit réel.

Quelques conseils :

• Rédiger la recherche ainsi : « $\mathrm{M}\in E \Leftrightarrow \ldots$

$\Leftrightarrow \ldots$ »

• Formuler une conclusion claire, soit en français, soit en écriture mathématique : « L'ensemble E est … » ou « $E=\ldots$ ».

....

....

....

....

....

....

....

……

……

……

……

……

……

……

IV. (4 points) On note *f* l’application du plan *P* dans lui-même qui à tout point M, d’affixe *z*, associe le point M' d’affixe $z' = z^2 - z + 2$. Déterminer les points invariants par *f* (c’est-à-dire les points confondus avec leur image).
On rédigera ainsi la recherche : « M est invariant par $f \Leftrightarrow$ M' = M » sous la forme d’une chaîne d’équivalences et l’on conclura ainsi :
« Les points invariants par *f* sont les points A et B d’affixes respectives ……………….. ».

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

V. (3 points) On note *f* l'application du plan *P* dans lui-même qui à tout point M, d'affixe *z*, associe le point M' d'affixe $z' = \mathrm{i}z^2$.

Soit A et B les points d'affixes respectives $1-3\mathrm{i}$ et $3-4\mathrm{i}$.

1°) Déterminer l'affixe du point C, image de A par *f*.

2°) Démontrer que O, B et C sont alignés.

……

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

VI. (3 points) L’étude sur une population d’un vaccin contre une certaine maladie a donné les résultats suivants :

- la moitié de la population est vaccinée ;
- une personne sur 5 atteinte de cette maladie est vaccinée ;
- la probabilité pour une personne d’avoir cette maladie est 0,6.

Calculer la probabilité qu’une personne ait cette maladie et soit vaccinée puis la probabilité qu’une personne ait la maladie sachant qu’elle est vaccinée. Donner les résultats sous forme décimale (détailler la démarche).

Conseil : On commencera par traduire l’énoncé en probabilités à l’aide de deux événements que l’on définira clairement.
On tâchera d’être le plus rigoureux possible.

………

………..……..….

………..……..….

………..……..….

………..……..….

………..……..….

………..……..….

………..……..….

………..……..….

………..……..….

………..……..….

………..……..….

………..……..….

………..……..….

………..……..….

………..……..….

VII. (2 points) Compléter directement la phrase :

Les solutions de l'équation différentielle $y' = 4 - 2y$ sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par ……………………..…

……………………………………………………..…………………………………..…………………........

Corrigé de l'interrogation écrite du 23-3-2010

Programme de cette interrogation écrite :
- nombres complexes (1ère partie) : calcul littéral complexe avec les quotients, ensembles de points, applications (notamment points invariants) (exercices qui posent souvent problème à cause de la formulation).
- probabilités conditionnelles
- équations différentielles du type $y' = ay + b$.

I.

$$\begin{aligned}
(\mathrm{E}) &\Leftrightarrow (1+\mathrm{i})z = (1-\mathrm{i})^2 \\
&\Leftrightarrow (1+\mathrm{i})z = -2\mathrm{i} \\
&\Leftrightarrow z = \frac{-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} \\
&\Leftrightarrow z = \frac{-2\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{2} \\
&\Leftrightarrow z = -\mathrm{i}(1-\mathrm{i}) \\
&\Leftrightarrow z = -1-\mathrm{i}
\end{aligned}$$

La solution de (E) est $-1-\mathrm{i}$.

N.B. : Une calculatrice pouvant faire des calculs avec les nombres complexes permet de vérifier ce résultat.
Donc un conseil : utiliser la calculatrice.

II.

1°)

a) $(x+\mathrm{i}y)\left[x-\mathrm{i}(y-1)\right] = x^2+y^2-y+\mathrm{i}x$ (développer intelligemment)

b) $\left[x+\mathrm{i}(y-1)\right]\left[x-\mathrm{i}(y-1)\right] = x^2+(y-1)^2$

2°)

$$\boxed{\begin{aligned}
\operatorname{Re} Z &= \frac{x^2+y^2-y}{x^2+(y-1)^2} \\
\operatorname{Im} Z &= \frac{x}{x^2+(y-1)^2}
\end{aligned}}$$

III.

$z^2=\left(x+\mathrm{i}y\right)^2=x^2-y^2+2\mathrm{i}xy$

$$\begin{aligned}\mathrm{M}\in E &\Leftrightarrow z^2\in\mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow \mathrm{Im}\,z^2=0\\ &\Leftrightarrow 2xy=0\\ &\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } y=0\end{aligned}$$

Conclusion :

L'ensemble E est la réunion de l'axe des réels et de l'axe des imaginaires purs.

$E=\left(\mathrm{O}x\right)\cup\left(\mathrm{O}y\right)$

IV.

$$\begin{aligned}\text{M est invariant par } f &\Leftrightarrow \mathrm{M}'=\mathrm{M}\\ &\Leftrightarrow z'=z\\ &\Leftrightarrow z=z^2-z+2\\ &\Leftrightarrow z^2-2z+2=0\end{aligned}$$

Considérons le polynôme z^2-2z+2.

Grâce au discriminant réduit, on obtient ses racines dans $\mathbb{C}$: $z_1=1+\mathrm{i}$ et $z_2=1-\mathrm{i}$ (elles sont conjuguées).

Conclusion :

Les points invariants par *f* sont les points A et B d'affixes respectives $1+\mathrm{i}$ et $1-\mathrm{i}$.

Remarque : Les points A et B sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées car leurs affixes sont conjuguées.

V. 1°) Déterminons l'affixe du point C, image de A par *f*.

Remarque sur la notation : on peut écrire $\mathrm{C}=f\left(\mathrm{A}\right)$.

$z_{\mathrm{C}}=\mathrm{i}\left(z_{\mathrm{A}}\right)^2=\mathrm{i}\left(1-3\mathrm{i}\right)^2=\mathrm{i}\left(-8-6\mathrm{i}\right)=6-8\mathrm{i}$

C a pour affixe 6 – 8i.

2°) Démontrons que O, B et C sont alignés.

$z_{\overline{\mathrm{OB}}}=z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{O}}=3-4\mathrm{i}$
$z_{\overline{\mathrm{OC}}}=z_{\mathrm{C}}-z_{\mathrm{O}}=6-8\mathrm{i}$

On observe que l'on a : $z_{\overline{\mathrm{OC}}}=2z_{\overline{\mathrm{OB}}}$.

On a donc $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OB}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont colinéaires.
Comme ils ont un point commun, on en déduit que les points O, B, C sont alignés.

N.B. : On peut dire que B est le milieu de [OC].

VI.

1°) On définit les événements
A : « la personne est atteinte de la maladie » ;
B : « la personne est vaccinée ».

• L'énoncé nous dit que la moitié de la population est vaccinée donc $P(\mathrm{B}) = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$.

• L'énoncé nous dit qu'une personne sur 5 atteinte de cette maladie est vaccinée, donc $P(\mathrm{B}/\mathrm{A}) = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$.
(Il faut bien comprendre cette phrase qu'il faut traduire par un « sachant que », c'est-à-dire avec une probabilité conditionnelle).

Un conseil :

Pour savoir si l'on doit traduire l'énoncé par une probabilité conditionnelle, essayer de reformuler la phrase avec un « parmi ».

Pour savoir si l'on doit traduire la phrase en intersection, essayer de reformuler la phrase avec la locution « en même temps » (on remplace le « et » par « en même temps »).

Ici, on peut reformuler la phrase :
« *Parmi* les personnes atteinte de cette maladie, une personne sur 5 est vaccinée. »
Cette reformulation nous permet de voir, qu'il faut traduire la phrase en probabilité conditionnelle.

• L'énoncé nous dit que la probabilité pour une personne d'avoir cette maladie est 0,6 donc $P(\mathrm{A}) = 0{,}6$.

1°) On utilise la formule des probabilités composées pour deux événements

$$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{B}/\mathrm{A}) = 0{,}6 \times 0{,}2 = 0{,}12$$

La probabilité pour une personne d'avoir cette maladie est 0,12.

2°) On utilise la définition.

$$P(\mathrm{A}/\mathrm{B}) = \frac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{B})} = \frac{0{,}12}{0{,}5} = 0{,}24$$

La probabilité qu'une personne ait la maladie sachant qu'elle est vaccinée est égale à 0,24.

VI. Les solutions de l'équation différentielle $y' = 4 - 2y$ sont les fonctions *f* définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k\mathrm{e}^{-2x} + 2$ $(k \in \mathbb{R})$.