TS3 — Devoir pour le lundi 22 mars 2010

L'objectif des trois premiers exercices est d'utiliser le tableur pour effectuer des calculs de probabilités

---

I. Un QCM comporte *n* questions et, pour chaque question, *p* réponses sont proposées dont une seule est exacte. Un élève répond au hasard à ce QCM et on note X la variable aléatoire égale au nombre de ses réponses correctes.

1°) Etude de la variable aléatoire X

a) Démontrer que X suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
b) Construire à l'aide du tableur une feuille de calcul automatisé sur le modèle ci-dessous permettant d'obtenir la loi de probabilité de X.

	A	B	C	D
1	Nombre de questions	10	Nombre de réponses proposées	3
2	x	$P(\mathrm{X}=x)$		
3	0			
4	1			

- On complète la colonne A à partir de la cellule A3 grâce à une formule de calcul.
- La cellule B1 contient le nombre de questions *n*.
- La cellule D1 contient le nombre proposées *p*.
- On utilise la fonction LOI.BINOMIALE du tableur.

Dans le cas de la loi binomiale B(*n* ; *p*),

- $P(\mathrm{X}=x)$ se calcule avec la formule : = LOI.BINOMIALE(*x* ; *n* ; *p* ; FAUX) ;
- $P(\mathrm{X}\leq x)$ se calcule avec la formule : = LOI.BINOMIALE(*x* ; *n* ; *p* ; VRAI) .

Ainsi dans la cellule B3, on saisit la formule : = LOI.BINOMIALE(A3 ; BB1 ; 1/D1 ; FAUX) .

On recopie ensuite cette formule vers le bas dans la colonne B à partir de la cellule B3.

c) Représenter graphiquement, dans le cas où $n=10$ et $p=3$, les résultats obtenus par un diagramme en bâtons.
d) Calculer avec les données de la feuille, une valeur approchée de la probabilité que l'élève ait au moins la moitié de ses réponses justes.

2°) La fiabilité des QCM

a) Reproduire et compléter le tableau ci-dessous :

Nombre de questions	6	6	10	10	20	20	50	50
Nombre de réponses possibles								
Probabilité d'avoir la moitié des réponses justes								

b) Un QCM est-il un outil fiable de vérification des connaissances ? On argumentera la réponse.

II. Une entreprise fabrique une grande quantité de micro-processeurs d'un type déterminé. La probabilité qu'un micro-processeur soit défectueux est de 0,05. Ces micro-processeurs sont vendus par lots de 50 pièces ? On appelle X le nombre de micro-processeurs défectueux trouvés dans un lot déterminé.
1°) Justifier pourquoi X suit la loi binomiale **B** (50 ; 0,05).
2°) Dans un tableur *Excel*, on souhaite faire apparaître les valeurs de $P(\mathrm{X}=k)$ et de $P(\mathrm{X}\leq k)$ pour *k* entier de 0 à 15.
Réaliser une feuille de calcul sur le modèle ci-dessous.

	A	B	C	D
1	k			
2	$P(\mathrm{X}=k)$			
3	$P(\mathrm{X}<=k)$			

Dans la cellule B2, saisir la formule : = LOI.BINOMIALE(B1 ; 50 ; 0,05 ; FAUX) .

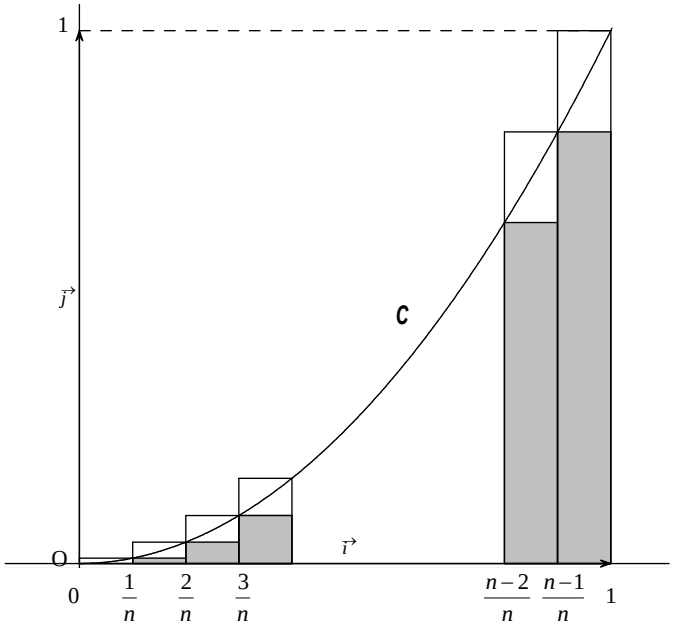
Dans la cellule B3, saisir la formule : = LOI.BINOMIALE(B1 ; 50 ; 0,05 ; VRAI) .

En recopiant par glisser/copier jusqu'à la colonne contenant $k=15$, compléter le tableau.
3°) Quelle est la probabilité d'avoir exactement trois pièces défectueuses dans un lot de cinquante ?
Donner une valeur approchée à l'aide du tableau précédent.
4°) Utiliser le tableau de la question 2°) pour donner un la valeur minimale de *k* pour laquelle $P(\mathrm{X}\leq k)>0{,}999$.

III. Lors du lancer d'un dé bien équilibré, on note A l'événement « obtenir un 5 ou un 6 ».
On lance ce dé trente fois et on appelle note X la variable aléatoire qui donne le nombre de succès de l'événement A au cours des trente lancers.
1°) Quelle est la loi de probabilité de X ?
2°) Utiliser un tableur pour obtenir les valeurs de $P(\mathrm{X}=k)$ et de $P(\mathrm{X}\leq k)$ pour *k* entier de 0 à 30.
3°) Utiliser le tableau obtenu pour trouver pour quelle valeur de *k* la probabilité $P(\mathrm{X}=k)$ est maximale.

IV. <u>Quadrature d'une cubique</u>

La courbe ci-dessous est la représentation graphique **C** de la fonction *f* définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $f(x)=x^3$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j})$. On se propose de calculer l'aire **A** du domaine situé sous la courbe en utilisant des suites (méthode de Pascal ou méthode des rectangles).



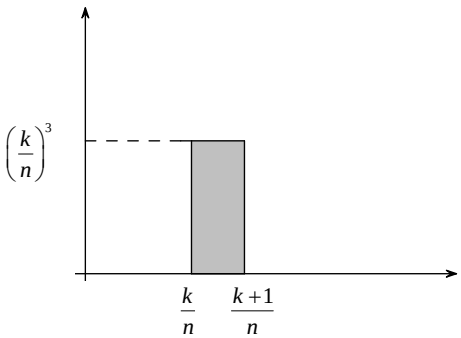
Pour cela, on partage l'intervalle $[0\ ;1]$ en n intervalles de même longueur $\frac{1}{n}$ $(n \geq 1)$.

On détermine alors n rectangles intérieurs au domaine (u_n est la somme de leurs aires) et n rectangles extérieurs (v_n est la somme de leurs aires).

On a donc $u_n \leq \boldsymbol{A} \leq v_n$ pour tout entier naturel n non nul.

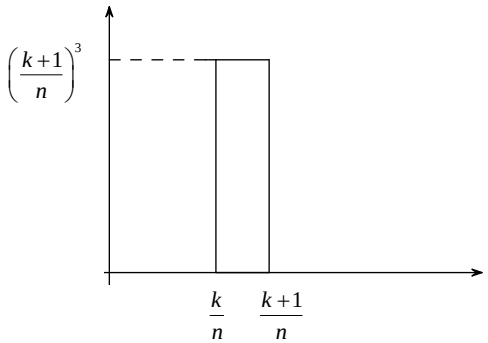
1°) a) On considère un rectangle **gris** $(0 \leq k \leq n-1)$.
Calculer son aire.

b) En déduire que $u_n = \frac{1}{n^4}\left[0^3 + 1^3 + ... + (n-1)^3\right]$.



2°) a) On considère un rectangle **incolore**
$(0 \leq k \leq n-1)$. Calculer son aire.

b) En déduire que $v_n = \frac{1}{n^4}\left[1^3 + ... + (n-1)^3 + n^3\right]$.



3°) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $\sum_{p=0}^{p=n} p^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

4°) En déduire un encadrement de $\boldsymbol{A}$.
Calculer $\boldsymbol{A}$.

Retrouver la valeur de $\boldsymbol{A}$ à l'aide d'une intégrale.

TS3

Correction du devoir pour le 22 mars 2010

IV. <u>Quadrature d'une cubique</u>

1°)

a) Aire du rectangle gris = $\left(\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}\right)\times\left(\frac{k}{n}\right)^3=\frac{1}{n}\times\frac{k^3}{n^3}=\frac{k^3}{n^4}$

b)

$u_n=$ somme des aires des rectangles gris

$u_n=\frac{0^3}{n^4}+\frac{1^3}{n^4}+...+\frac{(n-1)^3}{n^4}$

$u_n=\frac{1}{n^4}\left[0^3+1^3+...+(n-1)^3\right]$

2°) a) Aire du rectangle incolore = $\left(\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}\right)\times\left(\frac{k+1}{n}\right)^3=\frac{1}{n}\times\frac{(k+1)^3}{n^3}=\frac{(k+1)^3}{n^4}$

b)

$v_n=$ somme des aires des rectangles incolore

$v_n=\frac{1^3}{n^4}+...+\frac{(n+1)^3}{n^4}$

$v_n=\frac{1}{n^4}\left[1^3+...+(n-1)^3+n^3\right]$

3°) Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, on a $\sum_{p=0}^{p=n}p^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Pour $n\in\mathbb{N}$, on définit la phrase $P(n)$: « $\sum_{p=0}^{p=n}p^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ ».

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.

D'une part, on a : $\sum_{p=0}^{p=0}p^3=0^3=0$

D'autre part, on a : $\frac{0^2\times(0+1)^2}{4}=0$

Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel k tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $\sum_{p=0}^{p=k}p^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}$.

Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $\sum_{p=0}^{p=k+1}p^3=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$.

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{p=k+1}p^3&=\sum_{p=0}^{p=k}p^3+(k+1)^3\\&=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3\\&=(k+1)^2\left[\frac{k^2}{4}+(k+1)\right]\\&=(k+1)^2\frac{k^2+4k+4}{4}\\&=(k+1)^2\frac{(k+2)^2}{4}\\&=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}\end{aligned}$$

Conclusion :

On a démontré que $P(0)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel *k*, alors $P(k+1)$ est vraie.

Donc, d'après le **théorème de récurrence**, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel *n*.

4°) On a : somme des aires des rectangles gris $\leqslant$ ***A*** $\leqslant$ somme des aires des rectangles incolore

Donc : $u_n\leqslant$ ***A*** $\leqslant v_n$

On a : $u_n=\frac{1}{n^4}\left[0^3+1^3+...+(n-1)^3\right]=\frac{\sum_{p=0}^{p=n-1}p^3}{n^4}=\frac{(n-1)^2n^2}{4n^4}=\frac{(n-1)^2}{4n^2}$

Donc : $\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{(n-1)^2}{4n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{4n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

On a : $v_n=\frac{1}{n^4}\left[0^3+1^3+...+n^3\right]=\frac{\sum_{p=0}^{p=n}p^3}{n^4}=\frac{n^2(n+1)^2}{4n^4}=\frac{(n+1)^2}{4n^2}$

Donc : $\lim_{n\to+\infty}v_n=\frac{(n+1)^2}{4n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{4n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

D'après le théorème des gendarmes, on peut dire que $\boldsymbol{A} = \frac{1}{4}$ u.a..

On peut retrouver ce résultat en utilisant les intégrales.

On calcule $\int_0^1 t^3 \, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{1}{4}$