$1^{\text{ère}}$ S3 — Devoir pour le lundi 22 mars 2010

I. On considère la fonction *f* est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sin x + \sin(2x)$.

1°) Justifier que *f* est périodique de période 2π.
Etudier la parité de *f*.
En déduire qu'il suffit d'étudier la fonction *f* sur l'intervalle I = [0 ; π].

2°) Démontrer que pour tout réel *x*, on a : $f'(x) = 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$.

3°) a) Pour étudier le signe de $f'(x)$ pour $x \in \mathrm{I}$, on doit étudier le signe de chaque facteur.

Etude du signe de $2\cos x - 1$ pour $x \in \mathrm{I}$.
On résout deux inéquations et une équation dans l'intervalle I.

$2\cos x - 1 > 0$	$2\cos x - 1 < 0$	$2\cos x - 1 = 0$

Etude du signe de $\cos x + 1$ pour $x \in \mathrm{I}$.
On résout deux inéquations et une équation dans l'intervalle I.

$\cos x + 1 > 0$	$\cos x + 1 < 0$	$\cos x + 1 = 0$

b) Faire un tableau récapitulatif comprenant :
- l'étude du signe de $f'(x)$ pour $x \in \mathrm{I}$;
- les variations de *f* sur I.

Calculer les extremums locaux (valeurs exactes).

Calculer $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

4°) Tracer la représentation graphique de *f* sur l'intervalle I dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$; on prendra le centimètre pour unité graphique.
On commencera par placer les points correspondants aux extremums locaux de *f* sur I.
Tracer des pointillés et marquer leurs coordonnées sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées.
Tracer les tangentes horizontales en ces points.
Compléter la représentation graphique pour obtenir la représentation graphique sur l'intervalle [–2π ; 2π].

Vérifier le tracé à l'aide d'un logiciel de tracé de courbe sur ordinateur ou d'une calculatrice graphique (attention à penser à mettre la calculatrice en mode radian si elle n'y est pas déjà).

II. On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{1}{(x+1)^2}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : le centimètre).

1°) Justifier que *f* est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et démontrer que, pour tout réel $x \neq -1$, on a :
$f'(x) = 2\dfrac{x(x^2+3x+3)}{(x+1)^3}$.

2°) Dresser le tableau de variation de *f*.
3°) Déterminer les limites de *f* en + ∞, en – ∞ et en -1. Que peut-on déduire de cette dernière limite ?
Compléter le tableau de variations précédent avec les limites.
4°) Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet une droite Δ dont on donnera l'équation réduite pour asymptote oblique en + ∞ et en – ∞. Etudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ.
5°) Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

x	-2	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1
$f(x)$					

Tracer $\mathcal{C}$ et ses éléments remarquables.
Vérifier le tracé sur l'écran d'une calculatrice graphique ou d'un ordinateur grâce à un logiciel de tracé de courbe.

6°) Soit A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse -2.
Déterminer une équation de la tangente *T* au point A. Tracer *T*.

III. Le plan *P* est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

On rappelle la définition d'un disque.

> Soit Ω un point quelconque du plan et *R* un nombre strictement positif.
> L'ensemble $\mathcal{D}$ des points $\mathrm{M} \in P$ tels que $\Omega\mathrm{M} \leq R$ est le **disque fermé** de centre Ω et de rayon *R* (on dit qu'il est **fermé** car les points du cercle de centre Ω et de rayon *R* sont compris dans le disque).

Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}_1$ des points $\mathrm{M} \in P$ dont les coordonnées $(x\,;y)$ vérifient l'inéquation
$x^2 + y^2 - 4x + 6y \leq 0$.

Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}_2$ des points $\mathrm{M} \in P$ dont les coordonnées $(x\,;y)$ vérifient l'inéquation
$x^2 + y^2 \leq x + y$.

On rédigera ainsi :
« $\mathrm{M}(x\,;y) \in \mathcal{D}_1$ si et seulement si …………………….. »

IV. Dans chaque cas, on donne un procédé permettant de passer d'un terme au suivant pour une suite *u*.

Dans la colonne de droite, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exemple pour comprendre le mécanisme :

« On multiplie par 3 et on enlève 1 au résultat ».

On traduit ce procédé par $u_1 = 3u_0 - 1$, $u_2 = 3u_1 - 1 \dots$ et de manière générale $u_{n+1} = 3u_n - 1$.

	Description du procédé permettant de passer d'un terme au suivant	**Relation donnant u_{n+1} en fonction de u_n.**
1er procédé	« On multiplie par 2 et on ajoute 1 au résultat ».	……………………………..
2^{e} procédé	« On divise par 2 ».	……………………………..
3^{e} procédé	« On élève au carré et on enlève 2 au résultat ».	……………………………..
4^{e} procédé	« On ajoute 1 et on élève au carré le résultat ».	……………………………..
5^{e} procédé	« On calcule l'inverse et on ajoute 3 au résultat ».	……………………………..
6^{e} procédé	« On ajoute 4 et on calcule la racine carrée du résultat ».	……………………………..

V. Dans chaque cas, on définit une suite *u* par son terme général.
Représenter les premiers termes dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Faire un graphique dans chaque cas.

1er cas : u est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = (-1)^n$.

2^{e} cas : u est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

3^{e} cas : u est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = (-2)^n$.

VI. <u>Nombres pairs et impairs : les chaînes de nombres</u>

Partie A

Choisir un nombre entier. Est-il pair ?
- **Oui, alors diviser ce nombre par 2.**
- **Non, alors soustraire 1 à ce nombre.**

Si l'on commence avec le nombre 11, on obtient la chaîne : 11 ; 10 ; 5 ; 4 ; 2 ; 1 ; 0.

1°) Démarrer avec 6. Quelle chaîne obtient-on ? 6 …………………………………………………
Le nombre 6 est appelé un nombre en 4 étapes parce qu'il faut 4 étapes pour arriver à 0.

2°) Comment appellerait-on les nombres suivants ?

5 ……………………………………………………………………………………

Ainsi 5 est un ……………………………………………

8 ……………………………………………………………………………………

Ainsi 8 est un ……………………………………………

12 …………………………………………………………………………………

Ainsi 12 est un ……………………………………………

3°) Y a-t-il plus d'un nombre en 5 étapes ? …………………….

4°) Quel est le plus grand nombre en 7 étapes ? ……………..

Quel est le plus petit nombre en 7 étapes ? …………………

5°) Quel nombre inférieur à 20 nécessite le plus d'étapes pour arriver à 0 ? …………………

Quel nombre inférieur à 100 nécessite le plus d'étapes pour arriver à 0 ? …………………

Partie B : Que se passe-t-il si l'on change les règles pour créer des chaînes ?

Par exemple :

Choisir un nombre entier. Est-il pair ?
- **Oui, alors diviser ce nombre par 2.**
- **Non, alors ajouter 1 à ce nombre.**

1°) Si l'on démarre avec le nombre 11, quelle chaîne obtient-on ?

11 ……………………………………………………………………………………………..

11 est un nombre en …….. étapes. Que se passe-t-il finalement ?

2°) Quel est le plus grand nombre en 7 étapes ? ……………..

3°) Quel est le plus grand nombre inférieur à 20 qui a le plus grand nombre d'étape ? …………….

Quel est le plus grand nombre inférieur à 100 qui a le plus grand nombre d'étape ? …………….

$1^{\text{ère}}$ S3

Corrigé du devoir pour le 22 mars 2010

I. 1°) $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x + 2\pi) = 2\sin(x + 2\pi) + \sin(2x + 4\pi) = 2\sin x + \sin(2x) = f(x)$

donc f est périodique de période 2π.

Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$ donc il est centré en 0.

$\forall x \in \mathbb{R}$ $f(-x) = 2\sin(-x) + \sin(-2x) = -2\sin x - \sin(2x) = -f(x)$

On en déduit que f est impaire.

f est périodique de période 2π donc on peut réduire son domaine d'étude à un intervalle de longueur 2π soit $]-\pi ; \pi]$.
De plus, comme f est impaire, on peut réduire alors le domaine d'étude à $I = [0 ; \pi]$.

2°) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ ($x \mapsto 2\sin x$ et $x \mapsto \sin(2x)$)

$\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 2\cos x + 2\cos(2x)$

Or $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 2\cos x + 4\cos^2 x - 2$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 4\cos^2 x + 2\cos x - 2$.

Etudions le trinôme $4X^2 + 2X - 2$.

$\Delta = 4 + 8 \times 4 = 36 > 0$ donc il a 2 racines distinctes dans $\mathbb{R}$: $X_1 = \dfrac{-2 + \sqrt{36}}{8} = \dfrac{1}{2}$ et $X_2 = \dfrac{-2 - \sqrt{36}}{8} = -1$.

donc $4X^2 + 2X - 2 = 4\left(X - \dfrac{1}{2}\right)(X + 1) = 2(2X - 1)(X + 1)$.

donc (avec $X = \cos x$) $f'(x) = 2(2\cos x - 1)(\cos x + 1)$.

3°) a) **Etude du signe de $2\cos x - 1$ pour $x \in \mathrm{I}$.**

$2\cos x - 1 > 0$ $\cos x > \dfrac{1}{2}$	$2\cos x - 1 < 0$ $\cos x < \dfrac{1}{2}$	$2\cos x - 1 = 0$ $\cos x = \dfrac{1}{2}$
$0 \le x < \dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{3} < x \le \pi$	$x = \dfrac{\pi}{3}$

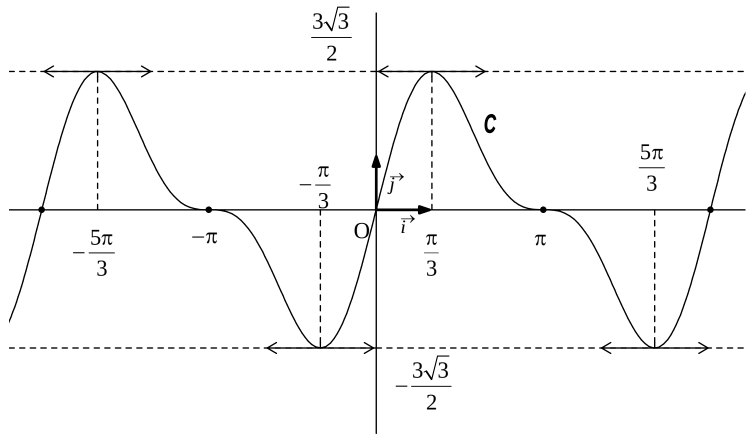
Etude du signe de $\cos x + 1$ pour $x \in \mathrm{I}$.

$\cos x + 1 > 0$ $\cos x > -1$	$\cos x + 1 < 0$ $\cos x < -1$	$\cos x + 1 = 0$ $\cos x = -1$
$0 \le x < \pi$	Pas de solution dans I	$x = \pi$

x	0		$\dfrac{\pi}{3}$		π
Signe de $2\cos x - 1$		$+$	0	$-$	
Signe de $\cos x + 1$		$+$		$+$	0
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0
Variations de f	0	$\nearrow$	$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + \sin(\pi) = 2$



II. 1°) **N.B. Lorsque le domaine de définition est donné dans l'énoncé, il n'y a pas lieu de le chercher.**

f est une fonction rationnelle
(N.B. Il est inutile de transformer l'expression de $f(x)$ pour dire que *f* est rationnelle)

donc *f* est dérivable sur son ensemble de définition.

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\} \quad f'(x) = 2 - \frac{2}{(x+1)^3} = \frac{2\left[(x+1)^3 - 1\right]}{(x+1)^3} = \frac{2\left(x^3+3x^2+3x\right)}{(x+1)^3} = \frac{2x\left(x^2+3x+3\right)}{(x+1)^3}$$

On utilise la formule $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$

2°)

On considère le polynôme x^2+3x+3.

Le discriminant de ce polynôme est égal à – 3.
Le discriminant est strictement négatif donc le polynôme est toujours du signe du coefficient du terme de degré 2 c'est-à-dire positif.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
SGN de $2x$		$-$		$+$	0	$+$	
SGN de x^2+3x+3		$+$		$+$		$+$	
SGN de $(x+1)^3$		$-$	0	$+$		$+$	
SGN de $f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de *f*	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -1[$; *f* est strictement décroissante sur l'intervalle $]-1\ ;\ 0]$; *f* est strictement croissante sur l'intervalle $[-1\ ;\ +\infty[$.

$f(0)=2$.

3°) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{(x+1)^2}=0\end{array}\right\}$ donc d'après la règle de limite d'une somme, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

De même, on trouve $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

On calcule la limite de *f* en – 1 directement (il n'y a pas lieu de faire la limite à droite et à gauche à ause du carré qui est présent au dénominateur).

$\lim\limits_{x\to-1}(2x+1)=-1$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-1}(1)=1 \\ \lim\limits_{x\to-1}(x+1)^2=0^+\end{array}\right\}$ donc d'après la règle de limite d'un quotient, $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{(x+1)^2}=+\infty$.

D'après la règle de limite d'une somme, on obtient $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=+\infty$.

On peut en déduire que $\mathcal{C}$ admet la droite Δ' d'équation réduite $x=-1$ pour asymptote verticale.

4°) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(2x+1)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{(x+1)^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2x+1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{(x+1)^2}=0$

On en déduit que $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation réduite $y=2x+1$ pour asymptote oblique en + ∞ et – ∞.

De plus, $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\} \quad f(x)-(2x+1)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\} \quad f(x)-(2x+1)>0$.

Par conséquent, $\mathcal{C}$ est toujours au-dessus de Δ.

5°)

x	-2	$-\dfrac{3}{2}$	$-\dfrac{1}{2}$	0	1
$f(x)$	-2	2	4	2	$\dfrac{13}{4}$

Tracé de la courbe

Partie préparatoire

- On trace le repère (les axes du repère).
  On marque *x* et *y*.

- On place les asymptotes Δ (d'équation réduite $y=2x+1$) et Δ' (d'équation $x=-1$).

Le tracé de Δ' est immédiat : la droite Δ' est parallèle à l'axe des ordonnées (droite verticale).

Le tracé de Δ se fait aisément, soit à l'aide d'un petit tableau de valeurs soit à l'aide du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine.

x	0	3
y	1	7

La droite Δ est oblique (asymptote oblique) ;

- On place le point de coordonnées (0 ; 2) qui correspond au minimum local et l'on trace la tangente horizontale en ce point (à l'aide d'une double flèche).
On marque 2 sur l'axe des ordonnées.

• On place les points correspondant au tableau de valeurs.

Tracé de la courbe elle-même

Il y a deux morceaux puisque la fonction est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$: partie de la courbe sur $]-\infty\ ;\ -1[$ puis sur $]-1\ ;\ +\infty[$.

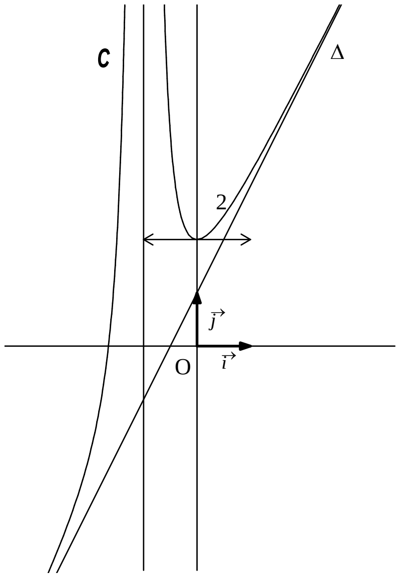
1^{er} morceau sur $]-\infty\ ;\ -1[$:

f est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -1[$.
C admet la droite Δ' pour asymptote verticale.
C admet la droite Δ pour asymptote oblique en – ∞.

Il y a juste à tracer en soignant l'allure des branches infinies.

2^e morceau sur $]-1\ ;\ +\infty[$:

f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-1\ ;\ 0]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[-1\ ;\ +\infty[$.
$f(0)=2$.
C admet la droite Δ' pour asymptote verticale.
C admet la droite Δ pour asymptote oblique en + ∞.



6°) On utilise la formule donnant l'équation réduite de la tangente en un point.

L'équation réduite de *T* s'écrit $y=4x+6$.

III.

$\mathrm{M}(x\ ;y)\in \boldsymbol{D}_1$ si et seulement si $x^2+y^2-4x+6y\leq 0$
si et seulement si $(x-2)^2+(y-3)^2\leq 13$
si et seulement si $\Omega\mathrm{M}\leq\sqrt{13}$ où Ω est le point de coordonnées (2 ; 3)

$\boldsymbol{D}_1$ est le disque fermé de centre Ω(2 ; 3) et de rayon $\sqrt{13}$.

$\mathrm{M}(x\ ;y)\in \boldsymbol{D}_2$ si et seulement si $x^2+y^2\leq x+y$
si et seulement si $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\leq\frac{1}{2}$
si et seulement si $\Omega\mathrm{M}\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$ où Ω est le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

$\boldsymbol{D}_2$ est le disque fermé de centre $\Omega\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

IV.

Cet exercice rejoint un peu les suites logiques

Description du procédé permettant de passer d'un terme au suivant	**Relation donnant u_{n+1} en fonction de u_n.**
« On multiplie par 2 et on ajoute 1 au résultat ».	$u_{n+1}=2u_n+1$
« On divise par 2 ».	$u_{n+1}=\frac{u_n}{2}$
« On élève au carré et on enlève 2 au résultat ».	$u_{n+1}=(u_n)^2-2$
« On ajoute 1 et on élève au carré le résultat ».	$u_{n+1}=(u_n+1)^2$
« On calcule l'inverse et on ajoute 3 au résultat ».	$u_{n+1}=\frac{1}{u_n}+3$
« On ajoute 4 et on calcule la racine carrée du résultat ».	$u_{n+1}=\sqrt{u_n+4}$

Pour comprendre, avec la 2^e suite, $u_1=\frac{u_0}{2}$; $u_2=\frac{u_1}{2}$; $u_3=\frac{u_2}{2}$ … de manière générale $u_{n+1}=\frac{u_n}{2}$.

V. On calcule les premiers termes de chacune des suites, et l'on place les points correspondants dans le plan muni d'un repère.