TS

Bac blanc de mathématiques du mercredi 17 février 2010

Durée : 4 heures

*

*　　*

La présentation et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie.
L'usage de la calculatrice est autorisé.

Une feuille de réponses est fournie avec l'énoncé. Cette feuille devra être remise avec la copie.

Exercice 1 (4,5 points)

Cet exercice comporte neuf questions. Pour chaque question, quatre réponses sont proposées.
Pour chaque réponse, indiquer si elle est vraie (V) ou fausse (F).
Compléter la feuille de réponses. Aucune justification n'est demandée sur la copie.

Barème :

Une réponse juste rapporte 1 point ; une réponse fausse ou une absence de réponse rapporte 0 point.
Le total des points sera divisé par 8 pour obtenir la note sur 20.
Aucune justification n'est demandée sur la copie.

1°) Le nombre de diagonales d'un polygone à n côtés ($n \geqslant 4$) est égal à :

A : $\binom{n}{2} - n$	B : $\binom{n}{2}$	C : $\dfrac{n(n-3)}{2}$	D : $n-2$

2°) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Le coefficient de x^n dans le développement de $(x-1)^{2n}$ est égal à :

A : $\binom{2n}{n}$	B : $(-1)^n \binom{2n}{n}$	C : 1	D : $-\binom{2n}{n}$

3°) On tire simultanément 4 cartes d'un jeu de 32 cartes.
Le nombre de tirages contenant exactement 2 cœurs est égal à :

A : $\binom{8}{2} \times \binom{24}{2}$	B : $\binom{4}{2} \times 8^2 \times 24^2$	C : $\binom{4}{2} \times (8\times 7) \times (24 \times 23)$	D : $\binom{8}{2} + \binom{24}{2}$

4°) On tire simultanément 3 cartes d'un jeu de 32 cartes.
Le nombre de tirages contenant au moins un roi est égal à :

A : 1860	B : 1512	C : 1684	D : 1500

5°) 20 chevaux courent. On note N le nombre de tiercés dans le désordre et N' le nombre de tiercés dans l'ordre.
Un tiercé est une liste ordonnée ou non ordonnée de trois chevaux.

A : $N = 6N'$	B : $N' = 6N$	C : $N' = 3N$	D : $N = 3N'$

6°) Le code d'entrée d'un immeuble est composé de 6 signes : 4 chiffres (parmi 0, 1, …, 9) et 2 lettres A et B.
Le nombre de codes composés de 2 lettres distinctes suivies de 4 chiffres distincts est :

A : 20 160	B : 40 000	C : 10 080	D : 15 120

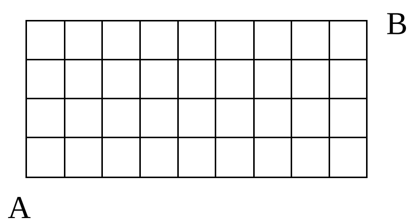
7°) Soit n un entier naturel non nul. La somme $\sum_{k=1}^{k=n} \binom{n}{k} 3^{n-k}$ est égale à :

A : $4^n - 3^n$	B : 4^n	C : 3^n	D : 1

8°) Soit n un entier naturel et x un réel. La somme $\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} x^k$ est égale à :

A : $(1+x)^n$	B : x^n	C : $1+x^n$	D : 2^n

9°) On considère le quadrillage ci-dessous.



Le nombre de chemins différents pour aller du point A au point B en se déplaçant sur le quadrillage toujours soit vers la droite, soit vers le haut est égal à :

A : $\binom{13}{4}$	B : $\binom{13}{9}$	C : 9×4	D : $3\,! \times 4\,!$

Exercice 2 (3 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout nombre entier naturel *n*, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4$.

On pose, pour tout entier naturel *n*, $v_n = u_n - 6$.

1°) Pour tout nombre entier naturel *n*, calculer v_{n+1} en fonction de v_n.
Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

2°) Démontrer que pour tout entier naturel *n*, $u_n = 6 - 5\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

3°) Déterminer le plus petit entier naturel *N* tel que si $n \geqslant N$, alors $u_n \geqslant 5,999$.

Exercice 3 (2,5 points)

On considère la suite (u_n) dont les termes vérifient, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $nu_n = (n+1)u_{n-1} + 1$ et $u_0 = 1$.

1°) Recopier et compléter le tableau suivant donnant les dix premiers termes de cette suite.
Le détail des calculs n'est pas demandé sur la copie.

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9

2°) *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer la nature de la suite (u_n).

Calculer u_{2010}.

Exercice 4 (4 points)

On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x \ln x - 2\ln x - (\ln x)^2$.

1°) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2°) Démontrer que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et que, pour tout réel $x \in]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \left(1 - \frac{2}{x}\right)(\ln x + 1)$.

3°) Dresser le tableau de variations de f (tableau complet avec les valeurs exactes des extremums).
4°) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions dans $]0\,;+\infty[$.
À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} des deux solutions non entières.

Exercice 5 (6 points)

Dans tout l'exercice, on note I l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

Partie A

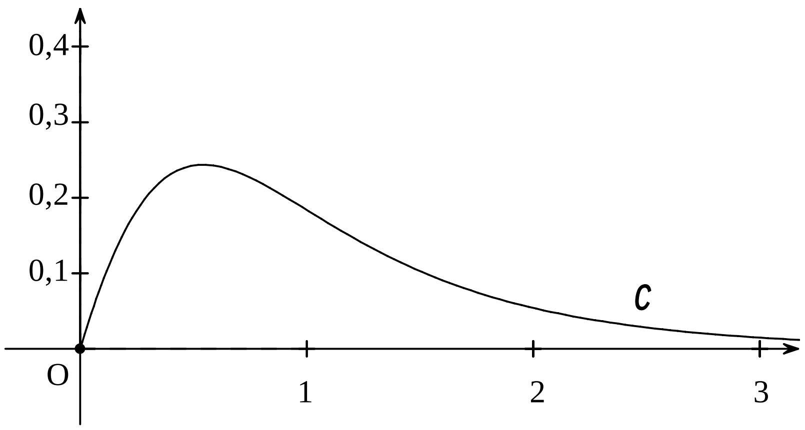
On note g la fonction définie sur I par $g(x)=x^3+x^2+x-1$.

1°) Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2°) Etudier les variations de g sur I. Dresser le tableau de variations de g sur I.
3°) Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans I.
4°) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B

On considère la fonction f définie sur I par $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}\mathrm{e}^{-x}$.

On donne ci-dessous la représentation graphique $\mathcal{C}$ de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal d'origine O.



1°) Justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

2°) Démontrer que f est dérivable sur I et que, pour tout réel $x\in\mathrm{I}$, $f'(x)$ et $g(x)$ sont de signes contraires.

3°) Dresser le tableau de variation de f.
4°) Soit A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 1. On note T la tangente à $\mathcal{C}$ en A.
a) Déterminer une équation de T.
b) Démontrer que T passe par le point E(2 ; 0). En déduire le tracé de T sur le graphique.
c) Déterminer graphiquement la position de T par rapport à $\mathcal{C}$.
d) On note F le point d'intersection de T et de l'axe des ordonnées.
Démontrer que A est le milieu du segment [EF].

Exercice 2 (3 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4$.

On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 6$.

1°) Pour tout nombre entier naturel n, calculer v_{n+1} en fonction de v_n.

Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

2°) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 6 - 5\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

3°) Déterminer le plus petit entier naturel N tel que si $n \geqslant N$, alors $u_n \geqslant 5,999$.

Exercice 3 (2,5 points)

On considère la suite (u_n) dont les termes vérifient, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $nu_n = (n+1)u_{n-1} + 1$ et $u_0 = 1$.

1°) Recopier et compléter le tableau suivant donnant les dix premiers termes de cette suite.
Le détail des calculs n'est pas demandé sur la copie.

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9

2°) *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer la nature de la suite (u_n).

Calculer u_{2010}.

Exercice 4 (4 points)

On considère deux points A et B du plan distants de 8 cm et les deux rotations r_1 et r_2 de centres respectifs A et B et d'angles respectifs $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{3}$.

1°) Montrer que $r_2 \circ r_1$ est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.
On appelle r cette rotation.

2°) Soit C le point tel que ABC soit équilatéral direct.
Trouver l'image de ABC par r.

3°) On sait que, sous certaines conditions, il existe une translation t et une isométrie g telles que $r = t \circ g$.
a) Citer l'énoncé exact du théorème évoqué ici.
b) Déterminer une telle translation t et une telle isométrie g.

Quelques aides à la rédaction :

● **Pour les suites :**

Ne pas oublier de noter la suite avec des parenthèses : $\left(u_n\right)$.

● **Pour les fonctions,** éviter les confusions entre *f* et $f\left(x\right)$.

Exemple :

« La fonction *f* est croissante sur … ».

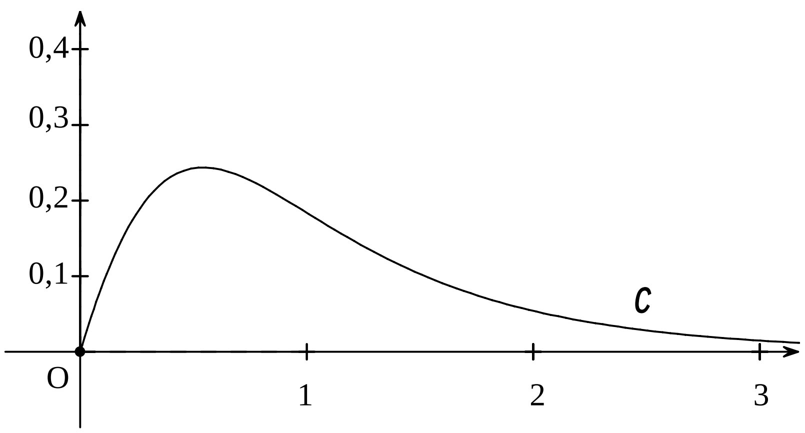
TS	Feuille de réponses à remettre avec la copie

Prénom : ………………………..   Nom : …………………………………………

Exercice 1 : Tableau de réponses à remplir très lisiblement sans rature

	A	B	C	D	
1°					
2°					
3°					
4°					
5°					
6°					
7°					
8°					
9°					
					Total sur 36 :
					Total sur 20 :

Exercice 5



Corrigé du bac blanc du 17-2-2010

Exercice 1

	A	B	C	D
1°	V	F	V	F
2°	F	V	F	F
3°	V	F	F	F
4°	F	F	V	F
5°	V	F	F	F
6°	F	F	V	F
7°	V	F	F	F
8°	V	F	F	F
9°	V	V	F	F

1°) Le nombre de diagonales d'un polygone à n côtés ($n \geqslant 4$) est égal à : $\binom{n}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$

2°) Le coefficient de x^n dans le développement de $(x-1)^{2n}$ est égal à : $(-1)^n \binom{2n}{n}$.

On utilise la formule du binôme de Newton : $(x-1)^{2n} = \sum_{k=0}^{k=2n} \binom{2n}{k} x^k (-1)^{2n-k}$.

Le terme de degré n est obtenu pour $k = n$: $\binom{2n}{n} x^n (-1)^n$.

Le coefficient de x^n est égal à $(-1)^n \binom{2n}{n}$.

3°) Le nombre de tirages contenant exactement 2 cœurs est égal à : $\binom{8}{2} \times \binom{24}{2}$

On tire 2 cartes parmi les 8 cœurs puis 2 autres cartes parmi les cartes autres que les 8 cœurs (il y en a 24).

4°) Le nombre de tirages contenant au moins un roi est égal à $\binom{32}{3} - \binom{28}{3} = 4960 - 3276 = 1684$.

5°) $N = 20 \times 19 \times 18$ et $N' = \binom{20}{3} = \frac{20 \times 19 \times 18}{3!} = \frac{N}{6}$

6°)

A – B : $10\times 9\times 8\times 7=5040$

B – A : $10\times 9\times 8\times 7=5040$

10 080 résultats possibles

7°) $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\binom{n}{k}3^{n-k}=\left(\sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}3^{n-k}\right)-3^n=\left(\sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}1^k\times 3^{n-k}\right)-3^n=(1+3)^n-3^n=4^n-3^n$

8°) $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}x^k=\sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}x^k\times 1^{n-k}=(x+1)^n$ (formule du binôme de Newton)

9°) Pour chaque chemins, il y a 9 déplacements horizontaux et 4 déplacements verticaux.
Il y a 13 déplacements à faire pour former un chemin.

On choisit la place des 9 déplacements verticaux ou des 4 déplacements verticaux.

$\binom{13}{4}=\binom{13}{9}$ (propriété de symétrie)

Exercice 2

1°)

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}\qquad &=u_{n+1}-6\\ &=\frac{1}{3}u_n+4-6\\ &=\frac{1}{3}u_n-2\\ &=\frac{1}{3}(u_n-6)\\ &=\frac{1}{3}v_n\end{aligned}$$

(v_n) est une suite géométrique de raison $q=\dfrac{1}{3}$.

Calculons le premier terme :

Donc $v_0=u_0-6=1-6=-5$.

2°) $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=u_0\times q^n=-5\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

Or $v_n=u_n-6$ donc $u_n=v_n+6$ donc $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=-5\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+6$.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 6 - 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ ou $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 6 - \frac{5}{3^n}$

3°) Déterminons le plus petit entier naturel N tel que si $n \geqslant N$, alors $u_n \geqslant 5,999$.

On cherche les entiers naturels n tels que $u_n \geqslant 5,999 \quad (1)$.

$$
\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow 6 - 5\left(\frac{1}{3}\right)^n \geqslant 5,999 \\
&\Leftrightarrow 5\left(\frac{1}{3}\right)^n \leqslant 0,001 \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^n \leqslant \frac{0,001}{5} \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^n \leqslant 0,0004 \\
&\Leftrightarrow n \ln\frac{1}{3} \leqslant \ln(0,0002) \\
&\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(0,0002)}{\ln\frac{1}{3}} \quad \text{(attention au changement de signe)}
\end{aligned}
$$

D'après la calculatrice, $\frac{\ln(0,0002)}{\ln\frac{1}{3}} = 7,7526833....$

L'entier N cherché est égal à 8.

N.B. : Question qui n'a pas été posé le jour du contrôle :
Représenter graphiquement les premiers termes de la suite.

Exercice 3

1°)

u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

2°) Il semble d'après le tableau de valeurs de la question 1°) que la suite (u_n) soit arithmétique de raison 2.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit la phrase $P(n)$: « $u_n = 1 + 2n$ ».

Initialisation :

Vérifions que $P(0)$ est vraie.
$u_0 = 1$ par hypothèse ; or $1 + 2 \times 0 = 1$ donc $u_0 = 1 + 2 \times 0$.
D'où $P(0)$ est vraie.

Hérédité :

Considérons un entier naturel *k* tel que la phrase $P(k)$ soit vraie c'est-à-dire $u_k = 1+2k$.
Démontrons qu'alors la phrase $P(k+1)$ est vraie c'est-à-dire $u_{k+1} = 1+2(k+1) = 3+2k$.

$$\begin{aligned}(k+1)u_{k+1} &= (k+2)u_k + 1\\ &= (k+2)(1+2k)+1\\ &= (k+2)(1+2k)+1\\ &= 2k^2+5k+3\end{aligned}$$

Considérons le polynôme $2x^2+5x+3$.
Les racines sont – 1 (racine évidente) et $-\dfrac{3}{2}$ (obtenue par produit).
On en déduit que $2x^2+5x+3 = 2(x+1)\left(x+\dfrac{3}{2}\right) = (x+1)(2x+3)$ (formule de factorisation d'un polynôme du second degré dont on connaît les racines).

On obtient donc $(k+1)u_{k+1} = (k+1)(2k+3)$.
Donc en simplifiant les deux membres de l'égalité, on obtient, $u_{k+1} = 2k+3$.

On en déduit que $P(k+1)$ est vraie.

Conclusion :

On a démontré que $P(0)$ est vraie et que si $P(k)$ est vraie pour un entier naturel *k*, alors $P(k+1)$ est vraie.
Donc, d'après le théorème de récurrence, la phrase $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel *n*.

On en déduit que la suite (u_n) est arithmétique de raison 2.

Calculons $u_{2010} = 1+2\times 2010 = 4021$.

Autre méthode :

On démontre que pour tout entier naturel *n*, on a : $u_{n-1}+u_{n+1} = 2u_n$ qui est une propriété caractéristique des suites arithmétiques (chaque terme, sauf le 1er, est la moyenne arithmétique de ceux qui l'encadrent ; cette propriété des suites arithmétiques justifie le nom de suite arithmétique).

Soit *n* un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On a : $nu_n = (n+1)u_{n-1}+1$ (1) et $(n+1)u_{n+1} = (n+2)u_n + 1$ soit $(n+2)u_n + 1 = (n+1)u_{n+1}$ (2).

On écrit les égalités (1) et (2).

$$nu_n = (n+1)u_{n-1}+1 \quad (1)$$
$$(n+2)u_n + 1 = (n+1)u_{n+1} \quad (2)$$

On ajoute membre à membre à membre les égalités (1) et (2).

$nu_n + (n+2)u_n + \cancel{1} = (n+1)u_{n-1} + \cancel{1} + (n+1)u_{n+1}$
$(2n+2)u_n = (n+1)u_{n-1} + (n+1)u_{n+1}$
$2(n+1)u_n = (n+1)u_{n-1} + (n+1)u_{n+1}$
On simplifie l'égalité par $n+1$. On obtient ainsi la relation souhaitée : $2u_n = u_{n-1} + u_{n+1}$.

Cette méthode prouve que la valeur de u_0 n'a absolument aucune influence sur le résultat.

Question non posée lors du bac blanc :

Si l'on change de valeur pour u_0 (par exemple 0, 2, 3…), on constate que la suite (u_n) est toujours arithmétique.

On suppose que $u_0 = a$. Démontrer que la suite (u_n) est arithmétique de raison $r = a+1$.

On effectue encore une démonstration par récurrence.

$P(n)$: « $u_n = n(a+1)+a$ ».

Idée pour l'hérédité (démonstration de $P(k-1)$ entraîne $P(k)$) :

$$\begin{aligned}ku_k &= (k+1)\left[(k-1)(a+1)+a\right]+1\\ &= (k^2-1)(a+1)+a(k+1)+1\\ &= (k^2-1)(a+1)+ak+a+1\\ &= (k^2-1+1)(a+1)+ak\\ &= k^2(a+1)+ak\end{aligned}$$

D'où $u_k = k(a+1)+a$.

Exercice 4

$f(x) = x\ln x - 2\ln x - (\ln x)^2$

1°) Déterminons $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

$\forall x \in \left]0\,;+\infty\right[\quad f(x) = \ln x\,(x-2-\ln x)$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} (x-2-\ln x) = +\infty\end{array}\right\}$ donc par limite d'un produit, on a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

$\forall x \in \left]0\,;+\infty\right[\quad f(x) = x\ln x\left(1-\dfrac{2}{x}-\dfrac{\ln x}{x}\right)$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} (x\ln x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \left(1-\dfrac{2}{x}-\dfrac{\ln x}{x}\right) = 1\end{array}\right\}$ donc par limite d'un produit, on a : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

2°) f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ d'après les règles de base sur les opérations algébriques pour les fonctions dérivables.

$$\forall x\in]0\,;+\infty[\quad f'(x)=1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}-2\times\frac{1}{x}-2\ln x\times\frac{1}{x}$$
$$=\ln x+1-\frac{2}{x}-2\ln x\times\frac{1}{x}$$
$$=\ln x+1-\frac{2}{x}(1+\ln x)$$
$$=(\ln x+1)-\frac{2}{x}(1+\ln x)$$
$$=\left(1-\frac{2}{x}\right)(\ln x+1)$$

3°) $\forall x\in]0\,;+\infty[\quad f'(x)=\dfrac{x-2}{x}(\ln x+1)$

Pour étudier le signe de $\ln x+1$, on résout deux inéquations et une équation.

$\ln x+1<0$	$\ln x+1>0$	$\ln x+1=0$
$\ln x<-1$	$\ln x>-1$	$\ln x=-1$
$\ln x<\ln\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\ln x>\ln\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\ln x=\ln\frac{1}{\mathrm{e}}$
$x<\frac{1}{\mathrm{e}}$	$x>\frac{1}{\mathrm{e}}$	$x=\frac{1}{\mathrm{e}}$

Tableau de variation de f :

x	0		$\frac{1}{\mathrm{e}}$		2		$+\infty$
Signe de $\ln x+1$	$\|$	$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de x	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de $f'(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$1-\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	$-(\ln 2)^2$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=1-\frac{1}{\mathrm{e}}$$

$$f(2)=-(\ln 2)^2$$

4°) Pour démontrer que l'équation $f(x)=0 \quad (\mathrm{E})$ admet trois solutions, on se place sur les intervalles $\left]0\,;\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$, $\left[\frac{1}{\mathrm{e}}\,;2\right]$, $\left[2\,;+\infty\right[$.

On pose : $\mathrm{I}_1=\left]0\,;\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$; $\mathrm{I}_2=\left[\frac{1}{\mathrm{e}}\,;2\right]$; $\mathrm{I}_3=\left[2\,;+\infty\right[$.

f est continue sur I_1.
f est strictement croissante sur I_1.
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ et $f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=1-\frac{1}{\mathrm{e}}$
Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires s'applique.
$f(\mathrm{I}_1)=\left]-\infty\,;1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$
$0\in\left]-\infty\,;1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$
Donc l'équation (E) admet une unique solution α dans I_1.

f est continue sur I_2.
f est strictement décroissante sur I_2.
$f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=1-\frac{1}{\mathrm{e}}$ et $f(2)=-(\ln 2)^2$.
Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires s'applique.
$f(\mathrm{I}_2)=\left[-(\ln 2)^2\,;1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$
$0\in\left[-(\ln 2)^2\,;1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$

Donc l'équation (E) admet une unique solution β dans I_2.

f est continue sur I_3.
f est strictement croissante sur I_3.
$f(2)=-(\ln 2)^2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires s'applique.
$f(\mathrm{I}_3)=\left[-(\ln 2)^2\,;+\infty\right[$
$0\in\left[-(\ln 2)^2\,;+\infty\right[$
Donc l'équation (E) admet une unique solution γ dans I_3.

La solution β dans l'intervalle $\left[\frac{1}{\mathrm{e}}\,;2\right]$ est égale à 1.

À l'aide de la calculatrice, on obtient les encadrements suivants de α et γ :

$0{,}15 < \alpha < 0{,}16$ et $3{,}14 < \gamma < 3{,}15$.

5°) Question non gardée dans la version définitive

Pour tout réel m, on note g_m la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g_m(x) = x\ln x - 2m\ln x - m(\ln x)^2$. On note $\mathcal{C}_m$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Démontrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_m$ passent par un point fixe A dont on déterminera les coordonnées.

b) Déterminer l'(les) abscisse(s) du (ou des) point(s) en lequel (lesquels) $\mathcal{C}_m$ admet une tangente horizontale.

b)

$$\forall x \in]0\,;+\infty[\quad g'_m(x) = 1 + \ln x + m\left(-\frac{2}{x}\right) - m\ln x \times \frac{2}{x}$$

$$= (1+\ln x)\left(1 - \frac{2m}{x}\right)$$

g'_m s'annule pour $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ et $2m$ si $m > 0$

Exercice 5

Partie A (2,5 points)

1°) (0,5 point)

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

2°) (0,5 point)

g est une fonction polynôme donc elle est continue et dérivable sur I.

$\forall x \in \mathrm{I} \quad g'(x) = 3x^2 + 2x + 1$

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $g'(x)$	$+$
Variations de g	$-1 \nearrow +\infty$

3°) (1 point)

g est continue sur I.
g est strictement croissante sur I.
$g(0) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$
Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires s'applique.
$g(\mathrm{I}) = [-1\,;+\infty[$
$0 \in [-1\,;+\infty[$

Donc l'équation $g(x)=0$ admet une unique racine α dans I.

4°) (0,5 point)

x	0		α		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B (3,5 points)

1°) (0,5 point)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}=0 \end{array}\right\}$$ donc par limite d'un produit, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

2°) (0,5 point)

f est dérivable sur I comme produit de fonctions dérivables sur I.

$$\begin{aligned}
\forall x\in\mathrm{I}\quad f'(x)&=\frac{1\times\left(x^2+1\right)-x\times 2x}{\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{e}^{-x}-\frac{x}{x^2+1}\mathrm{e}^{-x}\\
&=\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{e}^{-x}-\frac{x}{x^2+1}\mathrm{e}^{-x}\\
&=\left[\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}-\frac{x}{x^2+1}\right]\mathrm{e}^{-x}\\
&=\frac{1-x^2-x\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{e}^{-x}\\
&=\frac{1-x^2-x\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{e}^{-x}\\
&=\frac{-x^3-x^2-x+1}{\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{e}^{-x}\\
&=-\frac{x^3+x^2+x-1}{\left(1+x^2\right)^2}\mathrm{e}^{-x}\\
&=-\frac{g(x)}{\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{e}^{-x}
\end{aligned}$$

$$\forall x\in\mathrm{I}\quad \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}\mathrm{e}^{-x}>0$$

Donc pour tout réel $x\in\mathrm{I}$, $f'(x)$ et $g(x)$ sont de signes contraires.

3°) (0,5 point)

x	0		α		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

4°)

a) (0,5 point)

Une équation de T s'écrit $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

Or $f(1) = \dfrac{1}{2\mathrm{e}}$ et $f'(1) = -\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.

Donc une équation de T s'écrit $y = -\dfrac{1}{2\mathrm{e}}(x-1) + \dfrac{1}{2\mathrm{e}}$ soit $y = -\dfrac{1}{2\mathrm{e}}x + \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

b) (0,5 point)

$-\dfrac{1}{2\mathrm{e}}x_{\mathrm{E}} + \dfrac{1}{\mathrm{e}} = -\dfrac{1}{2\mathrm{e}} \times 2 + \dfrac{1}{\mathrm{e}} = -\dfrac{1}{\mathrm{e}} + \dfrac{1}{\mathrm{e}} = 0 = y_{\mathrm{E}}$ donc T passe par le point E(2 ; 0).

On en déduit le tracé de T sur le graphique (en joignant A au point E).

c) (0,5 point)

Graphiquement, on voit que :

- T est au-dessus de $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[0\,;1[$;
- T est au-dessous de $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.
- T et $\mathcal{C}$ sont sécantes au point d'abscisse 1.

N.B. : On peut justifier par le calcul que le point A est un point d'inflexion.

Un calcul facile donne $f''(x) = \dfrac{x^5 + 2x^4 + 4x^3 - 5x - 2}{\left(x^2+1\right)^3} \times \mathrm{e}^{-x}$.

Or : $x^5 + 2x^4 + 4x^3 - 5x - 2 = \left(x^2-1\right)\left(x^3 + 2x^2 + 5x + 2\right)$ (on peut utiliser un logiciel de calcul formel).

On voit aisément que $f''(x)$ s'annule et change de signe pour $x = 1$.

Donc on en déduit que $\mathcal{C}$ admet le point d'abscisse 1 pour point d'inflexion.

d) (0,5 point)

$\mathrm{A}\left|\begin{matrix} 1 \\ \dfrac{1}{2\mathrm{e}} \end{matrix}\right. \qquad \mathrm{E}\left|\begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix}\right. \qquad \mathrm{F}\left|\begin{matrix} 0 \\ \dfrac{1}{\mathrm{e}} \end{matrix}\right.$

$$\begin{cases} \dfrac{x_E + x_F}{2} = \dfrac{2+0}{2} = 1 = x_A \\ \dfrac{y_E + y_F}{2} = \dfrac{0 + \frac{1}{e}}{2} = \dfrac{1}{2e} = y_A \end{cases}$$

On en déduit que A est le milieu de [EF].