1ère L Option

Arithmétique (1)
Les entiers naturels
Division euclidienne

I. Présentation

1°) Arithmétique

L'**arithmétique** est la partie des mathématiques qui étudie les nombres, les opérations et les relations entre les nombres.
Le mot **arithmétique** vient du grec : *arithmos* (nombre).

2°) Entiers naturels

Les nombres qui nous intéressent dans ce chapitre sont les nombres entiers naturels c.à-d. positifs ou nuls : 0, 1, 2, 3…

On appelle ces nombres **naturel**s car ce sont les premiers qui ont été découverts par les hommes.
Ils ont été inventés pour dénombrer (compter les bêtes d'un troupeau par exemple). Rappelez-vous que les exercices de comptage font partie des premiers exercices que l'on fait à l'école maternelle.

3°) Le domaine de l'arithmétique

L'arithmétique est un domaine des mathématiques extrêmement riche, où de nombreux problèmes restent encore ouverts.

II. Rappels sur les ensembles de nombres

• **$\mathbb{N}$: ensemble des entiers naturels (c'est-à-dire positifs ou nuls)**

$\mathbb{N} = \{0\,;1\,;2\,;3...\}$

$\mathbb{N}$ a un plus petit élément 0 mais n'a pas de plus grand élément.

• **$\mathbb{Z}$: ensemble des entiers relatifs (positifs ou négatifs)**

$\mathbb{Z} = \{...-2\,;-1\,;0\,;1\,;2...\}$

• **$\mathbb{D}$: ensemble des décimaux relatifs**

Exemples : –1,54 ; 3,075

La partie décimale doit s'arrêter.

• **$\mathbb{Q}$: ensemble des nombres rationnels** (nombres qui peuvent s'écrire comme quotient de deux entiers relatifs)

Nombres qui peuvent s'écrire $\frac{x}{y}$ avec $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}^*$.

Exemples : $\frac{1}{3} = 0,3333...$; $-\frac{4}{5} = -0,8$; $\frac{5}{7}$

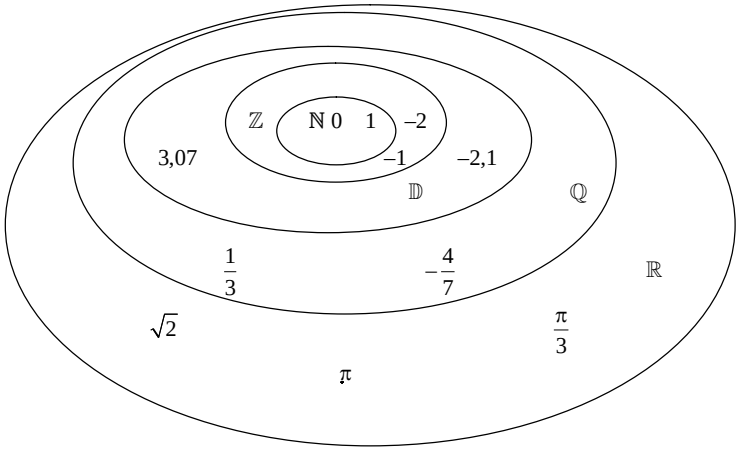
Pour un nombre rationnel ; le chiffres qui subissent ou effectuent la division ne doivent pas être décimaux.
Le résultat peut l'être (ce sera même généralement le cas).

• **$\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels**

Exemples : π, $\sqrt{2}$.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

est inclus dans



III. Division euclidienne

1°) Définition

La **division euclidienne** de deux entiers est l'opération qui donne un reste et un quotient entier.

Euclide est un mathématicien grec de l'antiquité (environ 330 – 275 avant Jésus–Christ).
Il est l'auteur des *Eléments* qui est le premier traité de mathématiques.

2°) Exemple

Faire la division euclidienne de 227 par 4.

dividende →	227	4	← **diviseur**
	27	56	← **quotient**
reste →	3		

Egalité : $227 = 56 \times 4 + 3$

3°) Egalité de la division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$$

L'égalité de la division euclidienne d'un entier naturel a par un entier naturel $b \neq 0$ s'écrit $a = bq + r$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N}$ tels que $r < b$.

Vocabulaire

L'entier q est appelé le **quotient** de la division euclidienne de a par b.
L'entier r est appelé le **reste** de la division euclidienne de a par b.

<u>Le reste doit toujours être strictement inférieur au diviseur.</u>

4°) Utilisation de la calculatrice.

Exemple :

Effectuer la division euclidienne de 169 204 par 37 en utilisant la calculatrice.

Méthode :

① 169 204 : 37 = 4 573,081 08…
② 457 337 =169 201
③ reste = 169 204 – 169 201 = 3

$$\begin{array}{r|l} 169\,204 & 37 \\ \cline{2-2} -169\,201 & 4573 \\ 3 & \end{array}$$

5°) Expression du quotient à l'aide de la partie entière (utile en informatique)

IV. <u>Définitions autour des entiers naturels</u>

1°) Entiers consécutifs : entiers qui se suivent.

Par exemple, 4, 5, 6, 7.

Si n est un entier, l'entier qui le suit est $n + 1$, l'entier qui le précède est $n - 1$.
On dit que $n + 1$ est le **successeur** de n et que $n - 1$ est le **prédécesseur** de n.

Il faut voir le $n + 1$ non comme une addition mais de manière fonctionnelle.

2°) Carré parfait : carré d'un entier naturel ;
Cube parfait : cube d'un entier naturel.

Liste des carrés parfaits : 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225.

V. <u>Les mystères des nombres</u>

Un vieux « truc » pour la table de 9.

Un exemple :

Vous devez calculer 6×9.
Vous ouvrez vos deux mains, les paumes face au visage. Vos doigts sont numérotés de 1à 10 en partant de la gauche.
Vous baissez le sixième doigt.
Il vous reste alors 5 doigts et 4 doigts de part et d'autre de ce doigt baissé.
Le résultat de 6×9 est donc 54.

Aux sources dans la division euclidienne

Exemple :

23 par 3.

1er point de vue :

On cherche à savoir combien de fois on peut mettre 3 dans 23.
On peut le mettre 7 fois ; il reste 2.

2e point de vue :

On enlève 3 à 23 ; on recommence avec le résultat obtenu.
Cette méthode est algorithmique.

Fonction partie entière

Caractérisation de la divisibilité d'un entier.

Exemple

n est divisible par 2 si et seulement si $\mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n}{2}$.

1ère L Option

Exercices sur les entiers naturels et la division euclidienne

1 Déterminer deux entiers naturels x et y sachant que leur somme est égale à 59 et que dans la division euclidienne de x par y le quotient est 8 et le reste 5.

2 Déterminer deux entiers naturels x et y sachant que leur différence est égale à 59 et que dans la division euclidienne de x par y le quotient est 10 et le reste 5.

3 **Notion d'algorithme : nombres heureux (un peu de numérologie…)**

L'emploi de la calculatrice est fort utile dans cet exercice ainsi que l'utilisation d'un brouillon pour tous les calculs.

On appelle **nombre heureux** un nombre entier qui s'écrit avec au moins deux chiffres dont la somme des carrés des chiffres finit par 1 après répétition du carré et de la somme comme dans l'exemple ci-dessous :

13 est-il un nombre heureux ?

$1^2 + 3^2 = 1 + 9 = 10$

On répète ce procédé avec 10, le nombre obtenu : $1^2 + 0^2 = 1 + 0 = 1$.

Le procédé finit par 1 donc 13 est un nombre heureux.
Quelquefois, plusieurs répétitions sont nécessaires.

Exemple : *58 est-il un nombre heureux ?* $5^2 + 8^2 = 25 + 64 = 89$
$8^2 + 9^2 = 64 + 81 = 145$
$1^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 16 + 25 = 42$
$4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20$
$2^2 + 0^2 = 4 + 0 = 4$

Ce procédé ne finit pas par 1. Donc 58 n'est pas un nombre heureux. 58 est un nombre triste !

On s'arrête lorsque l'on tombe sur un chiffre.

Questions :

1°) Compléter les phrases suivantes :

13 est un nombre heureux alors 31 est un nombre ……...

58 est un nombre triste alors 85 est un nombre ……..

58 est un nombre triste alors 89 ; 145 ; 42 et 20 sont des nombres ……

2°) Dans le tableau ci-dessous, entourer en rouge les nombres heureux et en vert les nombres tristes.

Utiliser la calculatrice.

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

3°) Prendre d'autres nombres tels que le numéro de téléphone, la date de naissance etc. et déterminer s'ils sont heureux.

4 **Nombres pairs et impairs : les chaînes de nombres**

Partie A

Choisir un nombre entier. Est-il pair ?
- **Oui, alors diviser ce nombre par 2.**
- **Non, alors soustraire 1 à ce nombre**.

Si l'on commence avec le nombre 11, on obtient la chaîne : 11 ; 10 ; 5 ; 4 ; 2 ; 1 ; 0.

1°) Démarrer avec 6. Quelle chaîne obtient-on ?

6 ……

Le nombre 6 est appelé un nombre en 6 étapes parce qu'il faut 4 étapes pour arriver à 0.

2°) Comment appellerait-on les nombres suivants ?

5 ……

Ainsi 5 est un ……

8 ……

Ainsi 8 est un ……

11 est un ……

12 ……

Ainsi 12 est un ……

3°) Y a-t-il plus d'un nombre en 5 étapes ? …….

4°) Quel est le plus grand nombre en 7 étapes ? ……..

Quel est le plus petit nombre en 7 étapes ? ……

5°) Quel nombre inférieur à 20 nécessite le plus d'étapes pour arriver à 0 ? ……

Quel nombre inférieur à 100 nécessite le plus d'étapes pour arriver à 0 ? ……

Partie B : Que se passe-t-il si l'on change les règles pour créer des chaînes ?

Par exemple :

Choisir un nombre entier. Est-il pair ?
- **Oui, alors diviser ce nombre par 2.**
- **Non, alors ajouter 1 à ce nombre**.

1°) Si l'on démarre avec le nombre 11, quelle chaîne obtient-on ?

11 ……..
11 est un nombre en …….. étapes. Que se passe-t-il finalement ?

2°) Quel est le plus grand nombre en 7 étapes ? ……..

3°) Quel est le plus grand nombre inférieur à 20 qui a le plus grand nombre d'étape ? …….

Quel est le plus grand nombre inférieur à 100 qui a le plus grand nombre d'étape ? …….

5 On considère l'algorithme suivant :

Entrée : n un entier naturel

Initialisation : donner à u la valeur initiale n

Traitement :
Tant que $u \geq 0$, affecter à u la valeur $u - 11$
FinTantque

Sortie : afficher u

1°) Faire fonctionner cet algorithme pour $n = 35$, $n = 50$, $n = 55$.
2°) Pour un entier naturel n quelconque, quel est le nombre entier naturel fournit par cet algorithme ?

6 Algorithmes

Partie 1
On considère l'algorithme suivant :

Entrée : n un entier naturel
Traitement et sortie :
Si $\frac{n}{11} = \mathrm{E}\left(\frac{n}{11}\right)$
alors afficher « oui »
sinon afficher « non »

1°) Faire fonctionner cet algorithme pour $n = 35$, $n = 44$, $n = 120$.
2°) Caractériser les nombres entiers naturels qu'il faut mettre en entrée pour obtenir comme sortie « oui ».

Partie 2

On veut automatiser l'étude de la divisibilité par 23 d'un entier naturel. Écrire, en langage naturel, un algorithme qui donne comme sortie « OUI » si, et seulement si, a été mis en entrée un entier naturel n divisible par 23, et comme sortie « NON » dans le cas contraire.

Partie 3

1°) Quel résultat l'algorithme de la partie 1 donne t-il en sortie lorsque l'entier naturel mis en entrée est 2 783 ?
2°) Quel résultat l'algorithme de la partie 3 donne t-il en sortie lorsque l'entier naturel mis en entrée est 2 783 ?
3°) Trouver un entier naturel strictement inférieur à 2 783 pour lequel ces deux algorithmes donnent en sortie « OUI ».

7 Années bissextiles
Une année (qui correspond à la durée de révolution de la Terre autour du Soleil) dure 365,2422 jours. Afin que notre calendrier coïncide avec cette période, certaines années durent 365 jours et d'autres 366 jours.
La partie décimale de 365,2422 valant presque un quart, on ajoute tous lés 4 ans 1 jour à notre calendrier (le 29 février).
Le critère retenu pour déterminer si une année est bissextile ou non est le suivant :

Règle n°1 : Si l'année est divisible par 4 alors c'est une année bissextile.

Par exemple, 2011 n'est pas une année bissextile, car 2011 n'est pas divisible par 4 ($\frac{2011}{4} = 502,75$). En revanche, 2012 est une année bissextile ($\frac{2012}{4} = 503$).

L'algorithme ci-dessous détermine selon cette règle si une année est bissextile.

Variables : N, un nombre entier.

Début
Saisir N.
Si PartieDécimale $\left(\frac{\mathrm{N}}{4}\right) = 0$
alors afficher « Année bissextile ».
Sinon afficher « Année non bissextile ».
FinSi

Fin

1°) Programmer cet algorithme sur la calculatrice.
2°) Déterminer, à l'aide de ce programme, si les années suivantes sont bissextiles : 2014 ; 2015 ; 2016 ; 2020 ; 2026.
La règle n°l n'est pas tout à fait correcte, car elle considère qu'une année dure 365,25 jours en moyenne au lieu de 365,2422.
Un léger décalage s'introduit au cours du temps. Une seconde règle a donc été établie :

Règle n°2 : Parmi les années de début de siècle, seule celles divisibles par 400 sont bissextiles.

3°) Proposer un algorithme et un programme qui détermine selon les règles 1 et 2 si une année est bissextile.

Correction

1 $x = 53$ et $y = 6$

2 $x = 65$ et $y = 6$

4 Questions

1°**)** 13 est un nombre heureux alors 31 est un nombre **heureux.**

58 est un nombre triste alors 85 est un nombre **triste.**

58 est un nombre triste alors 89, 145, 42 et 20 sont des nombres **tristes.**

2°)

10	11	12	**13**	14	15	16	17	18	**19**
20	21	22	**23**	24	25	26	27	**28**	29
30	**31**	**32**	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	**68**	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	**79**
80	81	**82**	83	84	85	**86**	87	88	89
90	**91**	92	93	**94**	95	96	**97**	98	99