$1^{\text{ère}}$ S Chapitre 32 Les fonctions cosinus et sinus

I. Dérivées des fonctions cosinus et sinus

1°) Formules (admises sans démonstration)

• La fonction $u : x \mapsto \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad u'(x) = -\sin x$.

• La fonction $v : x \mapsto \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad v'(x) = \cos x$.

2°) Autre écriture

$(\cos)'(x) = -\sin x$

$(\sin)'(x) = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\sin x)' = \cos x$

3°) Remarque

$$(\cos)'(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\sin)'(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Avec la notation de LEIBNIZ :

$$\frac{\mathrm{d}\cos x}{\mathrm{d}x} = -\sin x$$

$$\frac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x} = \cos x$$

(souvent en Physique, $\dfrac{\mathrm{d}\cos t}{\mathrm{d}x} = -\sin t$ et $\dfrac{\mathrm{d}\sin t}{\mathrm{d}x} = \cos t$)

4°) Application à la dérivée de la composée d'une fonction affine suivie de la fonction sinus ou cosinus)

• Rappel

a et b sont deux réels tels que $a \neq 0$.
u est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$par $f(x) = u(ax+b)$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \underline{\underline{a}} \times u'(ax+b)$.

• Application

La fonction $f : x \mapsto \cos(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = -a \times \sin(ax+b)$.

La fonction $g : x \mapsto \sin(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = a \times \cos(ax+b)$.

On retient :

$[\cos(ax+b)]' = -a \times \sin(ax+b)$
$[\sin(ax+b)]' = a \times \cos(ax+b)$

5°) Remarque d'écriture (très utiles pour les dérivées)

$f : x \mapsto \cos^3 x$
Calculons $f'(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = (\cos x)^3$.

On pose : $u(x) = \cos x$.
$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = [u(x)]^3$.

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad u'(x) = -\sin x$.

On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3 \times u'(x) \times [u(x)]^2$
$f'(x) = 3 \times (-\sin x) \times (\cos x)^2$
$f'(x) = -3 \times \sin x \times \cos^2 x$

II. Fonctions périodiques

1°) Définition

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
T est un réel strictement positif.

On dit que *f* est **périodique de période *T*** pour exprimer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x)$.
(On dit que alors que *T* est une période de *f*).

2°) Représentation graphique

● Propriété

La représentation graphique dans un repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ d'une fonction *f* périodique de période *T* est globalement invariante par la translation de vecteur $\vec{u} = T\vec{i}$.

● Démonstration

On note M un point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse *x* et M' le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse *x* + *T*.

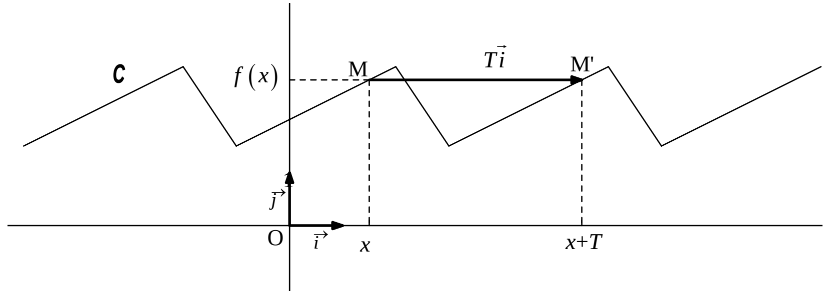
$$\text{M}\left|\begin{array}{l} x_{\text{M}} = x \\ y_{\text{M}} = f(x) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \text{M'}\left|\begin{array}{l} x_{\text{M'}} = x+T \\ y_{\text{M'}} = f(x+T) \underset{\uparrow}{=} f(x) \end{array}\right.$$

f périodique de période *T*

Donc $\overrightarrow{\text{MM'}}\left|\begin{array}{l} T \\ 0 \end{array}\right.$

D'où $\overrightarrow{\text{MM'}} = T\vec{i}$.

Par suite, M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u} = T\vec{i}$.



3°) Exercice

$$f : x \mapsto \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

Démontrer que *f* est périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{3}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) &= f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) \\ &= \cos\left[3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{4}\right] \\ &= \cos\left(3x + 2\pi + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos\left(\underbrace{3x + \frac{\pi}{4}}_{X} + 2\pi\right) \\ &= \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Donc *f* est périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{3}$.

4°) Une règle à savoir (en exercice, on refait la démonstration)

a et *b* sont deux réels tels que $a > 0$.
Les fonctions $f : x \mapsto \cos(ax+b)$ et $g : x \mapsto \sin(ax+b)$ sont périodiques de périodiques de période $T = \dfrac{2\pi}{a}$.

5°) Remarque

Lorsqu'une fonction est périodique de période *T*, on peut limiter l'étude sur **une période** c'est-à-dire sur un intervalle d'amplitude *T*.

III. Etude des fonctions cosinus et sinus

1°) Définition

$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto \cos x$	$v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto \sin x$

Les fonctions cosinus et sinus sont définies sur $\mathbb{R}$ mais sont à valeurs dans [–1 ; 1].

2°) Périodicité

u et v sont périodiques de période 2π.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad u(x+2\pi) = \cos(x+2\pi) = \cos x = u(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad v(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) = \sin x = v(x)$$

On peut donc étudier *u* et *v* sur l'intervalle [– π ; π].

3°) Parité

***u* est paire.**	***v* est impaire.**
• $D_u = \mathbb{R}$ centré en 0.	• $D_v = \mathbb{R}$ centré en 0.
• $\forall x \in \mathbb{R} \quad u(-x) = \cos(-x) = \cos x = u(x)$	• $\forall x \in \mathbb{R} \quad v(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -v(x)$

On peut donc étudier *u* et *v* sur l'intervalle [0 ; π].

4°) Variations

• La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$\forall x \in \mathbb{R} \quad u'(x) = -\sin x$.

x	0		π
SGN de $u'(x)$	0	–	0
Variations de u	1	↘	– 1

$u(0) = \cos 0 = 1$

$u(\pi) = \cos x = -1$

• La fonction $v : x \mapsto \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad v'(x) = \cos x$.

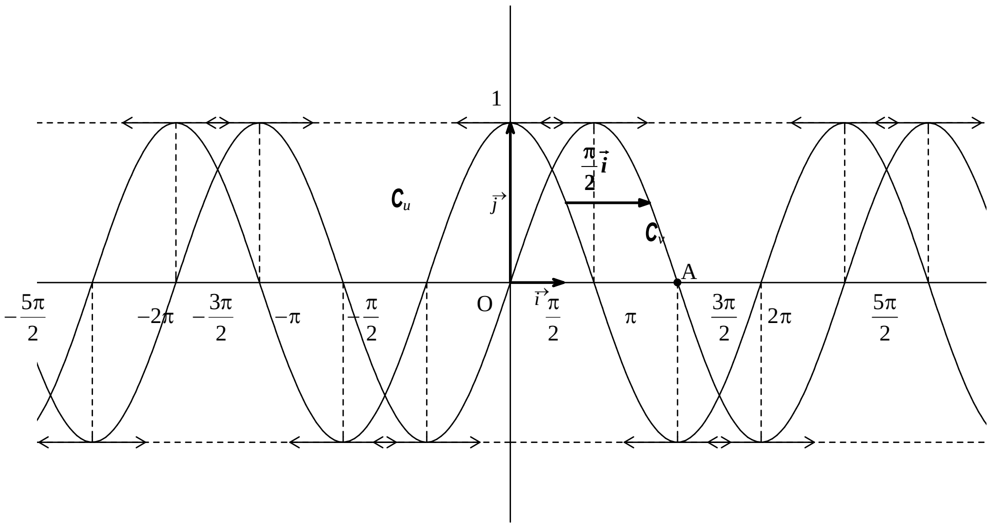
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
SGN de $v'(x)$		+	0	–	
Variations de v	0	↗	1	↘	0

$v(0) = \sin 0 = 0$

$v\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$

$v(\pi) = \sin \pi = 0$

5°) Représentations graphiques



Les courbes C_u et C_v sont **« sinusoïdes »**.

6°) Justification des symétries

● $\mathcal{C}_u$ admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie dans le plan muni d'un repère orthogonal car *u* est paire.

● $\mathcal{C}_v$ admet l'origine O du repère pour centre de symétrie car la fonction car *v* est impaire.

● $\mathcal{C}_v$ est l'image de $\mathcal{C}_u$ par la translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{i}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$

$$\cos\left[-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]=\sin x$$

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin x$$

$$u\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=v(x)$$

Rappel :

$g(x)=f(x-a)$

$\mathcal{C}_g = t_{a\vec{i}}(\mathcal{C}_f)$

● $\mathcal{C}_v$ admet la droite d'équation réduite $x=\frac{\pi}{2}$ pour axe de symétrie.

● $\mathcal{C}_u$ admet le point $\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{2}\,;0\right)$ pour centre de symétrie.