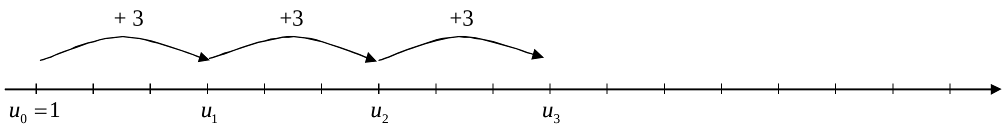
# $1^{\text{ère}}$ S Chapitre 37

**Suites arithmétiques**
**Suites géométriques**

## I. Présentation du chapitre

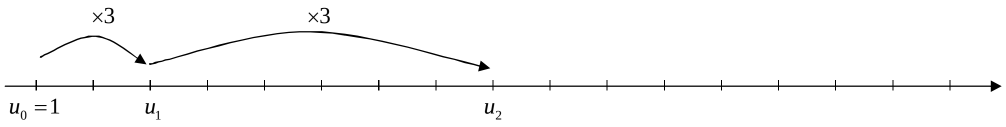
### 1°) Principe

● **Exemple 1 :**




**Suite arithmétique de raison $r = 3$.**

● **Exemple 2 :**




**Suite arithmétique de raison $r = 3$.**

**Suite géométrique de raison $q = 3$.**

**Le terme « raison » s'applique aussi bien aux suites arithmétiques qu'aux suites géométriques.**

**Les suites arithmétiques et les suites géométriques sont des suites particulières très importantes.**

### 2°) Difficultés du chapitre

Les formules savoir jongler avec les formules
(notamment les sommes)
Le calcul algébrique
Les notations

### 3°) Intérêt des SA et des SG

Résolution de problèmes concrets.
**Exemples :** intérêts bancaires (voir exercices).



## II. Tableau de formules

| | Suites arithmétiques | Suites géométriques |
|---|---|---|
| **Relation de récurrence** $(u_{n+1} / u_n)$ | $\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$ <br> **raison arithmétique** (nombre fixé) | $\boxed{u_{n+1} = u_n \times q}$ <br> **raison géométrique** (nombre fixé) |
| **Relation entre deux termes quelconques d'indices *n* et *p*** | $\boxed{u_n = u_p + (n-p)r}$ <br> (en particulier pour $p = 0$ et $p = 1$ <br> $u_n = u_0 + n \times r$ <br> $u_n = u_1 + (n-1) \times r$ ) | $\boxed{u_n = u_p \times q^{n-p}}$ <br> $u_n = u_0 \times q^n$ <br> $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ |
| **Sommes de termes consécutifs** | Somme des termes $= (\text{nombre de termes}) \times \dfrac{1^{\text{er}} + \text{dernier}}{2}$ | Somme des termes $= 1^{\text{er}}$ terme $\times \dfrac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$ <br> $(q \neq 1)$ |
| **Sens de variation (monotonie)** | $r > 0$ suite strictement croissante <br> $r < 0$ suite strictement décroissante <br> $r = 0$ suite constante | $u_0 > 0$ $\begin{cases} 0 < q < 1 & \text{suite strictement décroissante} \\ q > 1 & \text{suite strictement croissante} \\ q < 0 & \text{suite non monotone} \end{cases}$ <br> $u_0 < 0$ $\begin{cases} 0 < q < 1 & \text{suite strictement croissante} \\ q > 1 & \text{suite strictement décroissante} \\ q < 0 & \text{suite non monotone} \end{cases}$ <br> (contraire dans les deux premiers cas) |

⚠ Avant d'appliquer la moindre formule, il faut regarder si la suite est une arithmétique ou une suite géométrique.

## III. Définitions et conséquences immédiates

### 1°) Définitions

● **Suite arithmétique :** suite telle que chaque terme (sauf le premier) s'obtient en ajoutant au précédent un nombre fixe $r$ appelé la **raison**.

● **Suite géométrique :** suite telle que chaque terme (sauf le premier) s'obtient en multipliant le précédent par un nombre fixe $q$ appelé la **raison**.

**N.B. :** Le mot **raison** est employé dans les deux cas.

### 2°) Relation de récurrence

| Suite arithmétique | Suite géométrique |
|---|---|
| ***u* suite arithmétique de raison *r*.** | ***u* suite géométrique de raison *q*.** |
| $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + r$ | $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n \times q$ |

**(Mode itératif ou récurrent)**

### 3°) Exercices

① $\left| \begin{array}{l} u \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right.$ **est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -4$ et de raison $r = 3$.**

**Calculer les 5 premiers termes.**

② $\left| \begin{array}{l} u \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right.$ **est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 2$.**

**Calculer les 5 premiers termes.**

**Réponses**

①

$u_0 = -4$
$u_1 = u_0 + r = -4 + 3 = -1$
$u_2 = u_1 + r = -1 + 3 = 2$
$u_3 = u_2 + r = 2 + 3 = 5$
$u_4 = u_3 + r = 5 + 3 = 8$



②

$u_0 = 3$
$u_1 = u_0 \times q = 3 \times 2 = 6$
$u_2 = u_1 \times q = 6 \times 2 = 12$
$u_3 = u_2 \times q = 12 \times 2 = 24$
$u_4 = u_3 \times q = 24 \times 2 = 48$

### 4°) Propriété des différences et des quotients

| Suite arithmétique | Suite géométrique |
|---|---|
| ***u* suite arithmétique de raison *r*.** | ***u* suite géométrique de 1[er] terme $u_0 \neq 0$ et de raison $q \neq 0$.** |
| $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = r$ | $\forall n \in \mathbb{N} \quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$ |

## IV. Expression des termes

### 1°) Formules (voir tableau)

### 2°) Démonstration

| Suite arithmétique | Suite géométrique |
|---|---|
| ***u* suite arithmétique de premier terme $u_0$ et de raison *r*.**<br>$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + r$<br>$u_1 = u_0 + r$<br>$u_2 = u_0 + 2r$<br>$u_3 = u_0 + 3r$ | ***u* suite géométrique de premier terme $u_0$ et de raison *q*.**<br>$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n \times q$<br>$u_1 = u_0 \times q$<br>$u_2 = u_0 \times q^2$<br>$u_3 = u_0 \times q^3$ |
| $u_n = u_0 + nr$ | $u_n = u_0 \times q^n$ |
| $u_p = u_0 + p \times r$<br>$u_n - u_p = (n-p) \times r$ | $u_p = u_0 \times q^p$<br>$u_n = (u_0 \times q^p) \times q^{n-p}$ |
| **Retenir**<br>$u_n = u_p + (n-p)r$ (formule explicite généralisée) | **Retenir**<br>$u_n = u_p \times q^{n-p}$ (formule explicite généralisée) |

### 3°) Exercices d'application

① ***u* est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -1$ et de raison $r = 3$.**
**Exprimer le terme général en fonction de *n*.**

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0 + (n-0) \times r$
$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = -1 + n \times 3$
$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = -1 + 3n$

② **$u$ est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 3$.**
**Exprimer le terme général en fonction de $n$.**

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0 \times q^{n-0}$
$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2 \times 3^n \quad (\neq 6^n)$

**4°) Remarque sur les puissances**

**Règle :**

Quand on élève une fraction à une puissance, il faut mettre des parenthèses.

**Exemple :**

$\left(\frac{2}{3}\right)^n$ (et non $\frac{2^n}{3}$)

## V. <u>Sens de variation</u>

**1°) Règles**

Voir tableau.

**2°) Démonstration**

| Suite arithmétique | Suite géométrique |
|---|---|
| **$u$ suite arithmétique $\begin{cases}\text{de } 1^{\text{er}} \text{ terme } u_0 \\ \text{de raison } r\end{cases}$.**<br><br>$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = r$<br><br>Si $r > 0$, alors $u$ est strictement croissante à partir de l'indice 0.<br>Si $r = 0$, alors $u$ est constante.<br>Si $r < 0$ ; alors $u$ est strictement décroissante à partir de l'indice 0. | **$u$ suite géométrique $\begin{cases}\text{de } 1^{\text{er}} \text{ terme } u_0 \\ \text{de raison } q \notin \{0,1\}\end{cases}$.**<br><br>$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n$<br>$= u_0 \times q^n \times q - u_0 \times q^n$<br>$= u_0 \times q^n (q-1)$<br>Le signe de $u_{n+1} - u_n$ dépend :<br>● du signe de $u_0$<br>● du signe de $q^n$<br>● du signe de $q-1$ |

**1$^{\text{er}}$ cas :** $u_0 > 0$

● Si $q > 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n > 0$ donc $u$ est strictement croissante à partir de l'indice 0.
● Si $0 < q < 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n < 0$ donc $u$ est strictement décroissante à partir de l'indice 0.
● Si $q < 0$, alors $q^n$ change de signe suivant la parité de $n$.
La suite $u$ n'est donc pas monotone.



**2$^{\text{e}}$ cas :** $u_0 < 0$

● Si $q > 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n < 0$ donc $u$ est strictement décroissante à partir de l'indice 0.
● Si $0 < q < 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n > 0$ donc $u$ est strictement croissante à partir de l'indice 0.
● Si $q < 0$, alors $u$ est non monotone.

**3°) Remarques**

● Une suite arithmétique est toujours monotone.

● Une suite géométrique est monotone si et seulement si $q \geq 0$.

## VI. <u>Origine de l'appellation</u>

**1°) Définition**

> ***a* et *b* sont deux réels.**
> ● **Moyenne arithmétique de *a* et de *b* : $\frac{a+b}{2}$**
>
> ● **Moyenne géométrique de *a* et de *b* : $\sqrt{ab}$** (lorsque $a$ et $b$ sont dans $\mathbb{R}^+$)

**2°) Comparaison**

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$$
$$= \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}$$

Donc : $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq 0$

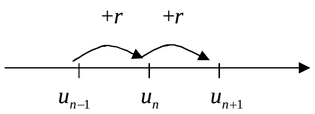
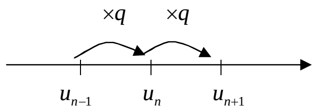
D'où : $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

**3°) Règle**

**Enoncé**

> ● Pour une suite arithmétique, chaque terme (sauf le 1$^{\text{er}}$) est la moyenne arithmétique de ceux qui l'encadrent.
>
> ● Pour une suite géométrique dont tous les termes sont positifs ou nuls, chaque terme (sauf le 1$^{\text{er}}$) est la moyenne géométrique de ceux qui l'encadrent.

**Démonstration :**

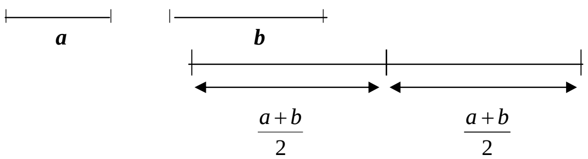
| Suite arithmétique | Suite géométrique |
|---|---|
|  |  |
| $u_n = u_{n+1} - r$<br>$u_n = u_{n-1} + r$<br>$2u_n = u_{n-1} + u_{n+1}$<br>D'où $u_n = \dfrac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$ | $u_n = \dfrac{u_{n+1}}{q}$<br>$u_n = u_{n-1} \times q$<br>${u_n}^2 = \dfrac{u_{n+1}}{q} \times u_{n-1} \times q$<br>${u_n}^2 = u_{n+1} \times u_{n-1}$<br>D'où $u_n = \sqrt{u_{n+1} \times u_{n-1}}$ |

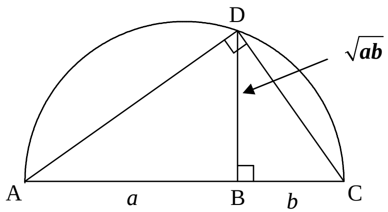
**Exemple :**

S.A. : $u_3$ : moyenne arithmétique de $u_2$ et de $u_4$.
S.G. : $u_3$ : moyenne géométrique de $u_2$ et de $u_4$.

**4°) Constructions géométriques**

$a \geq 0$, $b \geq 0$




## VI. Sommes des termes consécutifs d'une suite arithmétique ou d'une suite géométrique

**1°) Formules**

Voir tableau



**2°) Démonstrations**

**● Suite arithmétique**

On considère $p$ termes consécutifs d'une SA de raison $r$.

On note $S$ la somme
$a$ le 1er terme de cette somme
$l$ le dernier terme de cette somme

**But :** calculer $S$ (trouver une formule simple)

**Astuce :** écrire cette somme de deux manières différentes

Avec $a$ : $S = a + (a+r) + (a+2r) + ... + (a+(p-1)r)$

Avec $l$ (« l'inverse ») : $S = l + (l-r) + (l-2r) + ... + (l-(p-1)r)$

D'où $2S = \underbrace{(a+l)+(a+l)+(a+l)+...+(a+l)}_{p \text{ termes}}$

$2S = (a+l) \times p$

$S = \dfrac{(a+l) \times p}{2}$

$$\boxed{S = \text{nombre de termes} \times \frac{1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier}}{2}}$$

**● Suite géométrique**

On considère $p$ termes consécutifs d'une SG de raison $q \neq 1$.

On note $S$ la somme de ces termes
$a$ le 1er terme de cette somme

**But :** calculer $S$ (trouver une formule simple).

$$S = a \times q^0 + a \times q^1 + a \times q^2 + ... + a \times q^{p-1}$$
$$q^1 \times S = \qquad a \times q^1 + a \times q^2 + a \times q^3 + ... + a \times q^p$$

On soustrait membre à membre (la 1ère – la 2e).

$S - q \times S = a - a \times q^p$

$(1-q) \times S = a(1-q^p)$

Or $q \neq 1$ donc $1 - q \neq 0$ d'où $S = a \times \dfrac{1-q^p}{1-q}$.

$$\boxed{S = 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}}$$

### 3°) Exemples

**● Exemple 1**

***u* est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison $r = 2$.**
**Exprimer $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ en fonction de *n* (sous forme factorisée).**

On applique la formule à retenir.
On écrit donc :

$$S_n = (\text{nombre de termes}) \times \frac{1^{\text{er}} + \text{dernier}}{2}$$

$$S_n = \underbrace{(n+1)}_{n-0+1} \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

$$u_n = u_0 + (n-0) \times r$$
$$u_n = 7 + n \times 2$$
$$u_n = 7 + 2n$$

Donc $S_n = (n+1) \times \frac{7+7+2n}{2}$

$$S_n = (n+1) \times \frac{14+2n}{2}$$

$$S_n = (n+1) \times (7+n)$$

**● Exemple 2**

***u* est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = \frac{2}{3}$.**
**Exprimer $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ en fonction de *n* (sous forme factorisée).**

On applique la formule à retenir.

On écrit donc :

$$S_n = 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$$

$$S_n = 5 \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}$$

$$= 15 \times \left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$$

$$= 15\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$$

### 4°) Remarque

**Nombre de termes d'une somme**

**● Exemples**

$$\underbrace{u_0 + u_1 + ... + u_n}_{(n+1) \text{ termes}}$$

$$\underbrace{u_1 + u_2 + ... + u_n}_{n \text{ termes}}$$

$$\underbrace{u_3 + u_4 + ... + u_{20}}_{20-3+1=18 \text{ termes}}$$

**● Formule générale**

$$\boxed{\underbrace{u_p + u_{p+1} + ... + u_n}_{(n-p+1) \text{ termes}} \quad (p < n)}$$

### 5°) Applications

$n \in \mathbb{N}^*$

$$\boxed{\underbrace{1+2+3+...+n}_{} = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Somme des termes
consécutifs d'une SA
de $1^{\text{er}}$ terme 1 et de raison 1

**Exemple :**

$$1+2+.....+100 = \frac{100 \times 101}{2}$$

$$= \frac{101100}{2}$$
$$= 5050$$

## VIII. Comment démontrer qu'une suite est une suite arithmétique ou géométrique

### 1°) 1ère méthode

**Suite arithmétique**

**On démontre qu'il existe deux réels fixes *a* et *b* tels que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = a + b \times n$.**

**Suite géométrique**

**On démontre qu'il existe deux réels fixes *a* et *b* tels que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = a \times b^n$.**

### 2°) 2e méthode

**Suite arithmétique**

**On démontre que :** $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + \underbrace{r}_{\text{nombre fixe}}$

**ou** $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = r$

**Suite géométrique**

**On démontre que :** $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n \times \underbrace{q}_{\text{nombre fixe}}$

**ou** $\forall n \in \mathbb{N} \quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$ **mais il faut que** $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \neq 0$

**Applications pratiques :**

**Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, IL SUFFIT de démontrer que les différences entre deux termes consécutifs de la suite sont constantes.**

**Pour démontrer qu'une suite n'est pas arithmétique, IL SUFFIT de démontrer que deux différences entre deux termes consécutifs de la suite ne sont pas constantes.**

**Pour démontrer qu'une suite dont tous les termes sont non nuls est géométrique, IL SUFFIT de démontrer que les quotients entre deux termes consécutifs de la suite sont constants.**

**Pour démontrer qu'une suite dont tous les termes sont non nuls n'est pas géométrique, IL SUFFIT de démontrer que deux quotients entre deux termes consécutifs de la suite ne sont pas égaux.**



### 3°) Progression arithmétique (P.A.) et progression géométrique (P.G.)

**P.A.**

**On dit que trois réels *a*, *b*, *c* sont en <u>progression arithmétique</u> lorsque *a*, *b*, *c* sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.**

**Exemples :**

**1, 2, 3**
**18, 24, 30**

**P.G.**

**On dit que trois réels *a*, *b*, *c* sont en <u>progression géométrique</u> lorsque *a*, *b*, *c* sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique.**

**Exemples :**

**1, 3, 9**
**2, 4, 8**

## IX. Rappels sur les puissances

### 1°) Conventions – définitions

$a^0 = 1$

$a^1 = a$

$\left.\begin{aligned} a^{-1} &= \frac{1}{a} \\ a^{-n} &= \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \end{aligned}\right\} a \neq 0$

$0^0$ n'existe pas.

**<u>Exemples</u>**

**Calculer :**

$2^{-1} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5 \qquad (\neq 0{,}2)$

$5^{-2} = \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{25} \qquad (\neq 0{,}05)$

$2^{-n} \neq -2^n \qquad (\neq 0{,}05)$

### 2°) Règles

*a* et *b* sont des réels quelconques
*m* et *n* sont des entiers relatifs.

| | |
|---|---|
| **R₁** | $a^m \times a^n = a^{m+n}$ |
| **R₂** | $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ |
| **R₃** | $\left(a^m\right)^n = a^{m\times n}$ |
| **R₄** | $\left(ab\right)^n = a^n \times b^n$ |

- ⚠ Pas de règle quand on additionne des puissances : $3^2 + 5^2 = ?$

- $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \neq \dfrac{1^n}{3}$
- $-5^n \neq \left(-5\right)^n$ pour $n$ impair

- $5 - 2^n \neq \left(5-2\right)^n$ pour $n$ impair

**3°) Exercice : transformations d'écriture**

$n$ est un entier naturel quelconque.

Ecrire sous la forme $a^n$ en utilisant les règles.

$\dfrac{3^n}{2^n}$ ; $5^{-n}$ ; $2^n \times 3^{-n}$ ; $3^{2n}$ ; $2^{-3n}$.

$$\frac{3^n}{2^n} = \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$5^{-n} = \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

$$2^n \times 3^{-n} = 2^n \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$3^{2n} = 9^n$$

$$2^{-3n} = \left(\frac{1}{2^3}\right)^n = \left(\frac{1}{8}\right)^n$$