$1^{\text{ère}}$ S Chapitre 36 — Géométrie dans l'espace (3) (Les coordonnées dans l'espace)

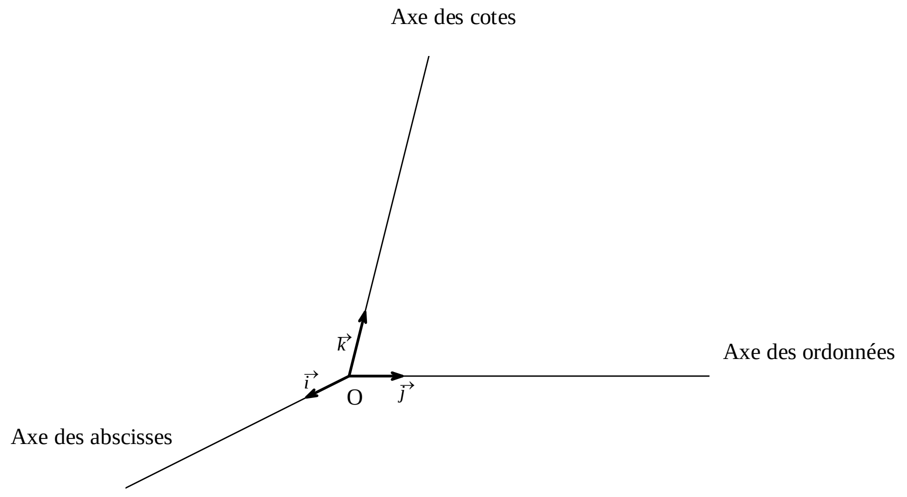
Introduction

Comme dans le plan, on peut repérer les points de l'espace par leurs coordonnées dans un repère.
Il y aura une coordonnée de plus par rapport au plan ; un point aura donc 3 coordonnées : la première s'appellera l'abscisse, la deuxième s'appellera l'ordonnée et la troisième s'appellera **la cote**.
On aura les mêmes règles de calcul que dans le dans le plan sauf qu'il y aura une troisième coordonnée.

I. Repères et bases de l'espace

1°) Définition

On appelle **repère (cartésien) de l'espace** tout quadruplet $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ où O est un point fixé de l'espace et $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ trois vecteurs **non coplanaires** de l'espace.



Repère oblique

2°) Vocabulaire

- On dit que O est l'**origine** du repère.
- On dit que le triplet $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est une **base** de l'ensemble des vecteurs de l'espace.

3°) Repères particuliers

- Un repère dont les axes sont perpendiculaires est dit **orthogonal** .

- Un repère orthogonal dont les normes de $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sont chacune égales à 1 (pour l'unité de longueur choisie) est dit **orthonormé.**

II. Cordonnées d'un point

1°) Théorème

$\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est un repère de l'espace.
Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet (x, y, z) tel que $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

2°) Définition

On dit que *x*, *y*, *z* sont les **coordonnées** de M dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

x : **abscisse** de M
y : **ordonnée** de M
z : **cote** de M

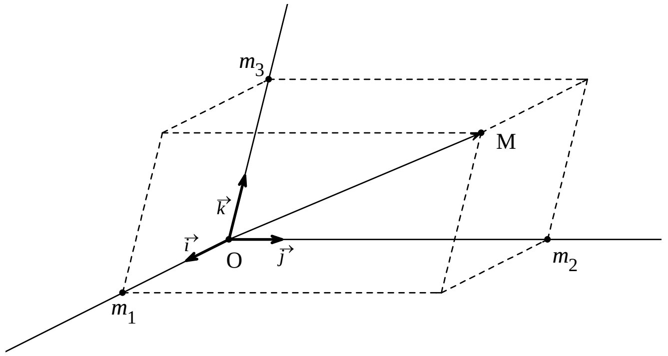
Notations :

$$\mathrm{M}(x\,;y\,;z) \textbf{ ou } \mathrm{M}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \textbf{ ou } \mathrm{M}\left|\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right.$$

La droite sur laquelle on lit les abscisses des points est appelée **axe des abscisses**, celle sur laquelle on lit les ordonnées des points est appelée **axe des ordonnées** et celle sur laquelle on lit les cotes est appelée **axe des cotes**.

3°) Démonstration

Considérons le parallélépipède construit sur les axes du repère tel que (OM) soit une grande diagonale (voir figure).

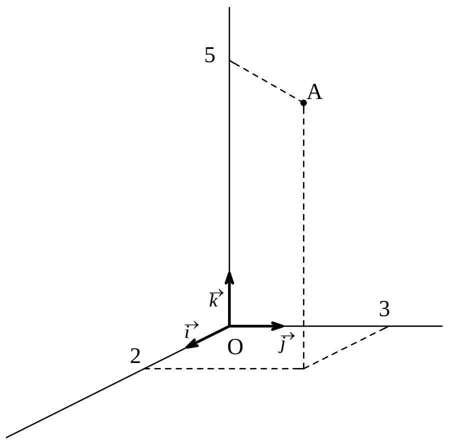


$\overrightarrow{\mathrm{O}m_1}$ est colinéaire à $\vec{i}$ donc $\exists! x \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{O}m_1} = x\vec{i}$.
$\overrightarrow{\mathrm{O}m_2}$ est colinéaire à $\vec{j}$ donc $\exists! y \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{O}m_2} = y\vec{j}$.
$\overrightarrow{\mathrm{O}m_3}$ est colinéaire à $\vec{j}$ donc $\exists! z \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{O}m_3} = z\vec{k}$.
On obtient : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

4°) Exemple

$$A \left| \begin{array}{l} 2 \\ 3 \\ 5 \end{array} \right.$$

$\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$



Où sont situés les négatifs sur les axes ?

III. Cordonnées d'un vecteur

1°) Théorème

$\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est un repère de l'espace.
Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique triplet (x, y, z) tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

On parle de **décomposition** du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

2°) Définition

On dit que x, y, z sont les **coordonnées** de $\vec{u}$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ de l'ensemble des vecteurs de l'espace.

3°) Démonstration

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique point M de l'espace tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.
On a vu qu'il existait un unique triplet (x, y, z) tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
Donc $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

IV. Propriétés

1°) Propriété 1 (égalité de deux vecteurs)

$\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ sont deux vecteurs quelconques de l'espace.

$\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$

(découle de l'unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base)

2°) Propriété 2 (coordonnées de la somme de deux vecteurs)

Enoncé

$\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ sont deux vecteurs quelconques de l'espace.
Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x', y + y', z + z')$.

Démonstration

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
$\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$
$\vec{u} + \vec{v} = (x + x')\vec{i} + (y + y')\vec{j} + (z + z')\vec{k}$

3°) Propriété 3 (coordonnées du produit d'un vecteur par un réel)

Enoncé

$\vec{u}(x, y, z)$ est un vecteur quelconque de l'espace.
λ est un réel quelconque.
Le vecteur $\lambda\vec{u}$ a pour coordonnées $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.

Démonstration

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$
$\lambda\vec{u} = \lambda x\vec{i} + \lambda y\vec{j} + \lambda z\vec{k}$

4°) Propriété 4 (coordonnées d'un vecteur défini par deux points)

Enoncé

$A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ sont deux points quelconques de l'espace.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$.

Démonstration

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = x_{\mathrm{A}}\vec{i} + y_{\mathrm{A}}\vec{j} + z_{\mathrm{A}}\vec{k}$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = x_{\mathrm{B}}\vec{i} + y_{\mathrm{B}}\vec{j} + z_{\mathrm{B}}\vec{k}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}})\vec{i} + (y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}})\vec{j} + (z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}})\vec{k}$

5°) Propriété 5 (coordonnées du milieu d'un segment)

Enoncé

$\mathrm{A}(x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}}, z_{\mathrm{A}})$ et $\mathrm{B}(x_{\mathrm{B}}, y_{\mathrm{B}}, z_{\mathrm{B}})$ sont deux points quelconques de l'espace.
Le milieu I de $[\mathrm{AB}]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_{\mathrm{A}} + x_{\mathrm{B}}}{2}, \dfrac{y_{\mathrm{A}} + y_{\mathrm{B}}}{2}, \dfrac{z_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{B}}}{2}\right)$.

Démonstration

I milieu de $[\mathrm{AB}]$ signifie que $\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \overrightarrow{\mathrm{IB}}$.

Donc $\begin{cases} x_{\mathrm{I}} - x_{\mathrm{A}} = x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{I}} \\ y_{\mathrm{I}} - y_{\mathrm{A}} = y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{I}} \\ z_{\mathrm{I}} - z_{\mathrm{A}} = z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{I}} \end{cases}$

D'où

$$\begin{cases} x_{\mathrm{I}} = \dfrac{x_{\mathrm{A}} + x_{\mathrm{B}}}{2} \\ y_{\mathrm{I}} = \dfrac{y_{\mathrm{A}} + y_{\mathrm{B}}}{2} \\ z_{\mathrm{I}} = \dfrac{z_{\mathrm{A}} + z_{\mathrm{B}}}{2} \end{cases}$$

6°) Propriété 6 (coordonnées d'un barycentre)

Enoncé

$\mathrm{A}(x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}}, z_{\mathrm{A}})$ et $\mathrm{B}(x_{\mathrm{B}}, y_{\mathrm{B}}, z_{\mathrm{B}})$ sont deux points quelconques de l'espace.
a et b sont deux réels tels que $a + b = 0$.
Le barycentre G des points pondérés (A, a) et (B, b) a pour coordonnées $\left(\dfrac{ax_{\mathrm{A}} + bx_{\mathrm{B}}}{a+b}, \dfrac{ay_{\mathrm{A}} + by_{\mathrm{B}}}{a+b}, \dfrac{az_{\mathrm{A}} + bz_{\mathrm{B}}}{a+b}\right)$.

Démonstration

D'après la relation fondamentale, pour tout point M de l'espace on a :
$a\overrightarrow{\mathrm{MA}} + b\overrightarrow{\mathrm{MB}} = (a+b)\overrightarrow{\mathrm{MG}}$

Donc pour $\mathrm{M} = \mathrm{O}$, on a : $a\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + b\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (a+b)\overrightarrow{\mathrm{OG}}$.

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{a+b}\left(a\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + b\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = x_{\mathrm{A}}\vec{i} + y_{\mathrm{A}}\vec{j} + z_{\mathrm{A}}\vec{k}$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = x_{\mathrm{B}}\vec{i} + y_{\mathrm{B}}\vec{j} + z_{\mathrm{B}}\vec{k}$

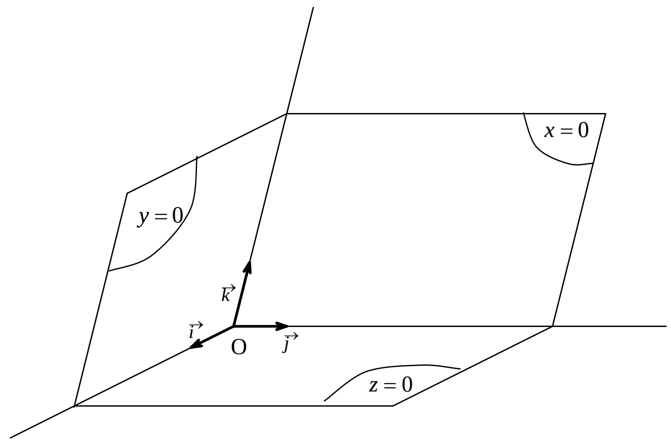
$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{ax_{\mathrm{A}} + bx_{\mathrm{B}}}{a+b}\vec{i} + \frac{ay_{\mathrm{A}} + by_{\mathrm{B}}}{a+b}\vec{j} + \frac{az_{\mathrm{A}} + bz_{\mathrm{B}}}{a+b}\vec{k}$$

V. <u>Equations cartésiennes de plans parallèles aux plans de coordonnées</u>

1°) Définition

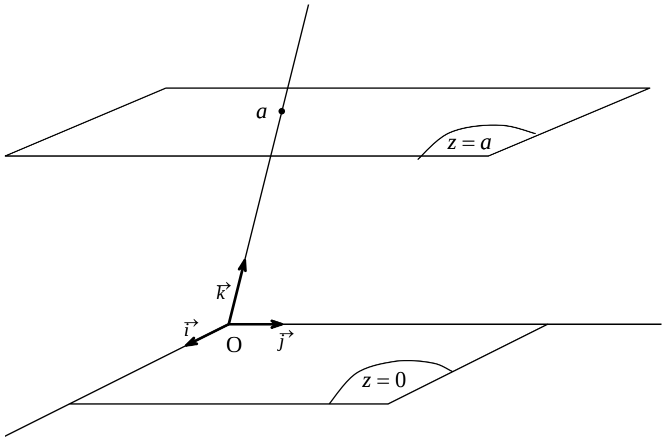
On appelle **plan de coordonnées** les plans de repères $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$, $(\mathrm{O}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(\mathrm{O}, \vec{k}, \vec{i})$.

2°) Equation cartésienne des plans de coordonnées



3°) Equations de plans parallèles aux plans de coordonnées

Un plan parallèle au plan de repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$ admet une équation cartésienne de la forme $z = a$ $(a \in \mathbb{R})$.
Un plan parallèle au plan de repère $(\mathrm{O}, \vec{j}, \vec{k})$ admet une équation cartésienne de la forme $x = b$ $(b \in \mathbb{R})$.
Un plan parallèle au plan de repère $(\mathrm{O}, \vec{k}, \vec{i})$ admet une équation cartésienne de la forme $y = c$ $(c \in \mathbb{R})$.



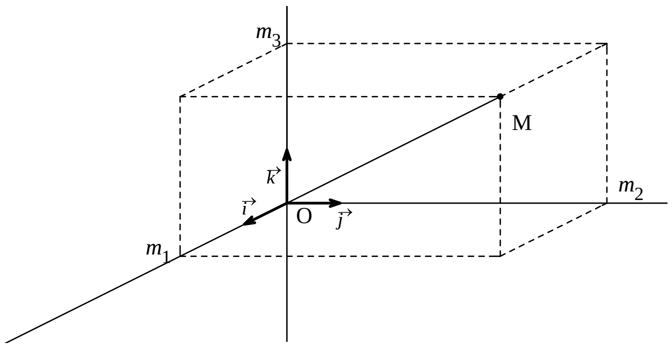
VI. <u>Norme d'un vecteur et distance de deux points dans un repère orthonormé de l'espace</u>

1°) Définition (repère orthonormé de l'espace)

> On dit qu'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ de $\boldsymbol{E}$ est un **repère orthonormé** pour exprimer que
> $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$, $\vec{i} \perp \vec{k}$
> $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$ (pour l'unité de longueur choisie)

2°) Formule de la norme d'un vecteur

$\vec{u}$ est un vecteur quelconque de $\boldsymbol{E}$ **dans un repère orthonormé** de l'espace.



$\mathrm{OM}^2 = \mathrm{O}m_1{}^2 + \mathrm{O}m_2{}^2 + \mathrm{O}m_3{}^2$

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

3°) Distance de deux points

> $\mathrm{A}\left(x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}}, z_{\mathrm{A}}\right)$ et $\mathrm{B}\left(x_{\mathrm{B}}, y_{\mathrm{B}}, z_{\mathrm{B}}\right)$ sont deux points quelconques de $\boldsymbol{E}$ **dans un repère orthonormé**.
>
> $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \left| \begin{array}{l} x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}} \\ y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}} \\ z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}} \end{array} \right.$
>
> Donc $\mathrm{AB} = \left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\| = \sqrt{\left(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}\right)^2 + \left(y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}}\right)^2 + \left(z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}\right)^2}$

VII. <u>Equations cartésiennes de sphères dans un repère orthonormé</u>

1°) Théorème

> Une équation cartésienne de la sphère S de centre $\Omega \left| \begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array} \right.$ et de rayon $R > 0$ s'écrit
> $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

$\mathrm{M}(x, y, z) \in S \Leftrightarrow \Omega\mathrm{M}^2 = R^2$

2°) Exemple

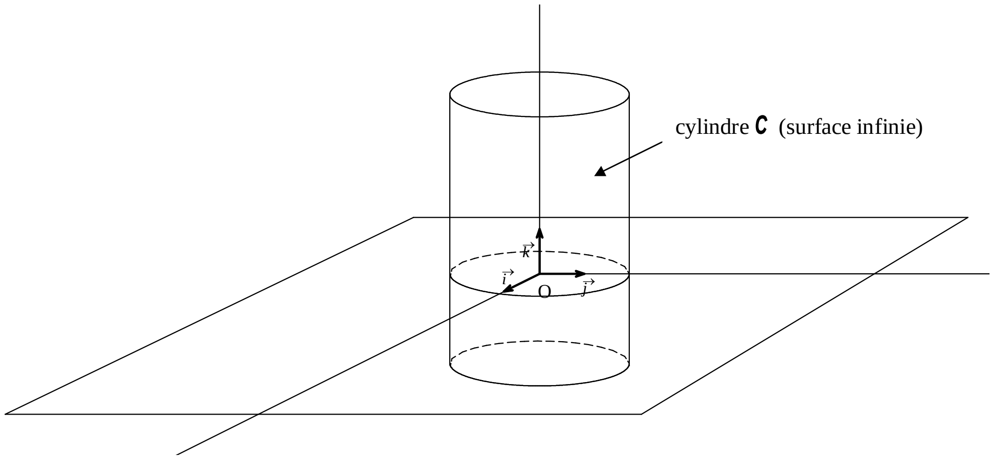
Une équation cartésienne de la sphère S de centre $\Omega \left| \begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 2 \end{array} \right.$ et de rayon $R = 3$ s'écrit

$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$
(forme canonique d'une équation cartésienne de sphère)

VIII. <u>Equations cartésiennes de cylindres de révolution dans un repère orthonormé</u>

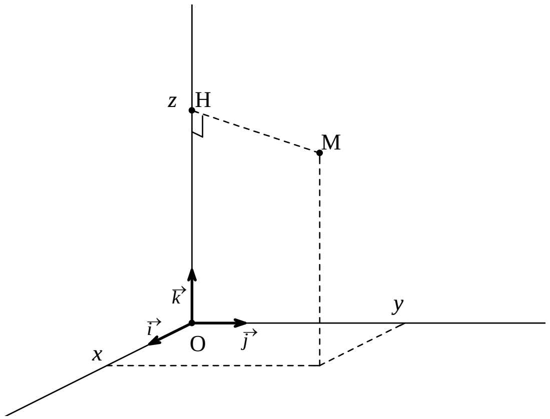
1°) Théorème

> Une équation cartésienne du cylindre $\boldsymbol{C}$ de révolution $\left| \begin{array}{l} \text{d'axe } (\mathrm{O}z) \\ \text{de rayon } R > 0 \end{array} \right.$ s'écrit $x^2 + y^2 = R^2$.



2°) Démonstration

On utilise un point $M\left|\begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}\right.$ de l'espace.



On note H son projeté orthogonal sur l'axe (Oz).

$H\left|\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ z \end{array}\right.$

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow \left\| \overrightarrow{HM} \right\| = R \\ &\Leftrightarrow \left\| \overrightarrow{HM} \right\|^2 = R^2 \\ &\Leftrightarrow (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-z)^2 = R^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = R^2 \end{aligned}$$

3°) Exemples

- Une équation cartésienne du cylindre $\mathcal{C}$ de révolution $\left|\begin{array}{l} \text{d'axe } (Oz) \\ \text{de rayon } R = 5 \end{array}\right.$ s'écrit $x^2 + y^2 = 25$.

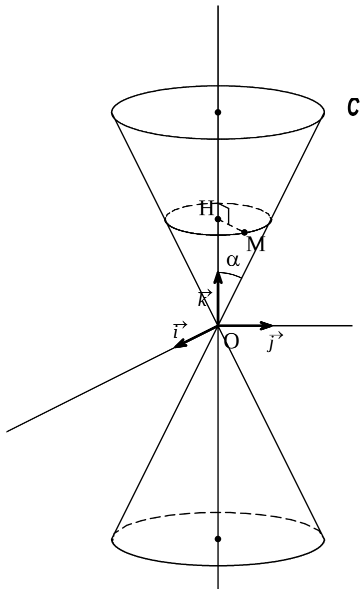
- Une équation cartésienne du cylindre $\mathcal{C}$ de révolution $\left|\begin{array}{l} \text{d'axe } (Oy) \\ \text{de rayon } R = 3 \end{array}\right.$ s'écrit $x^2 + z^2 = 9$.

IX. Equations cartésiennes de cônes de révolution dans un repère orthonormé

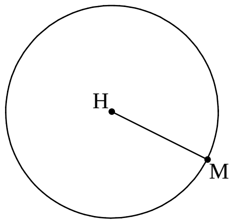
1°) Théorème

Une équation cartésienne du cône $\mathcal{C}$ de révolution $\left|\begin{array}{l} \bullet \text{ d'axe } (Oz) \\ \bullet \text{ de sommet O} \\ \bullet \text{ de demi-angle au sommet } \alpha \quad \left(\alpha \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[\right) \end{array}\right.$ s'écrit

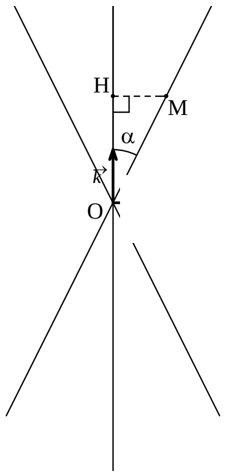
$x^2 + y^2 = (\tan\alpha)^2 z^2$.



Coupe horizontale :



Coupe verticale par le plan (M, O*z*) :



2°) Démonstration

On utilise un point $\text{M}\left|\begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}\right.$.

On note H son projeté orthogonal sur l'axe (O*z*).

$\text{H}\left|\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ z \end{array}\right.$

$$\begin{aligned}
\text{M} \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow \text{HM} = \text{OH} \times \tan\alpha \\
&\Leftrightarrow \text{HM}^2 = \text{OH}^2 \times \tan^2\alpha \\
&\Leftrightarrow (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-z)^2 = z^2 \times \tan^2\alpha \\
&\Leftrightarrow x^2 + y^2 = z^2 \times \tan^2\alpha
\end{aligned}$$

3°) Exemple

$\alpha = \dfrac{\pi}{6}$

$\tan\alpha = \tan\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$x^2 + y^2 = \dfrac{z^2}{3}$.

Bilan sur les plans de coordonnées

Plan	Repère	Equation
(xOy)	$\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$	$z = 0$
(yOz)	$\left(\text{O}, \vec{j}, \vec{k}\right)$	$x = 0$
(zOx)	$\left(\text{O}, \vec{k}, \vec{i}\right)$	$y = 0$

Un plan parallèle au plan de repère $\left(\text{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ admet une équation cartésienne de la forme $z = a$ $\left(a \in \mathbb{R}\right)$.
Un plan parallèle au plan de repère $\left(\text{O}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ admet une équation cartésienne de la forme $x = b$ $\left(b \in \mathbb{R}\right)$.
Un plan parallèle au plan de repère $\left(\text{O}, \vec{k}, \vec{i}\right)$ admet une équation cartésienne de la forme $y = c$ $\left(c \in \mathbb{R}\right)$.