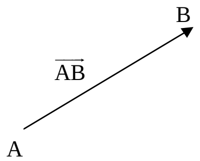
$1^{\text{ère}}$ S Chapitre 36 — Géométrie dans l'espace (2) (Les vecteurs de l'espace)

I. Calculs vectoriels dans l'espace

1°) Définition d'un vecteur non nul

A et B sont 2 points distincts de $\mathcal{E}$ (espace).
Le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$ est défini par :

- **sa direction :** celle de la droite (AB)
- **son sens :** celui de A vers B.
- **sa norme :** la longueur AB $\left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB\right)$

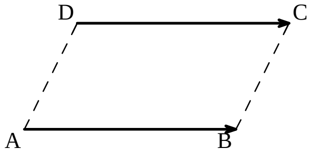


2°) Définition du vecteur nul

Un vecteur de l'espace défini par deux points confondus de $\mathcal{E}$ $\left(\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}...\right)$ est appelé le **vecteur nul** et noté $\vec{0}$.

3°) Egalité de deux vecteurs

A, B, C, D sont 4 points distincts de $\mathcal{E}$.



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow$ ABCD est un parallélogramme.

4°) Opérations sur les vecteurs

- Comme dans le plan, on définit
  - la somme de deux vecteurs
  - le produit d'un vecteur par un réel
- Les propriétés sont les mêmes que dans le plan.

5°) Relation de Chasles

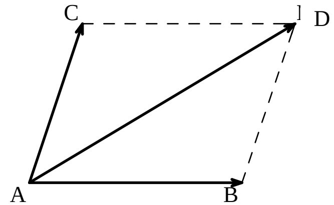
A, B, C sont trois points quelconques de $\mathcal{E}$.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

(ou $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$)

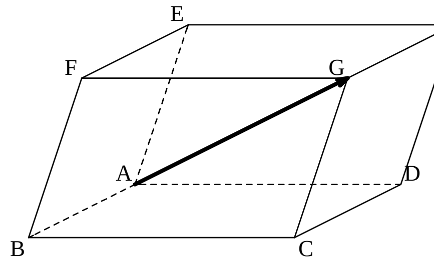
6°) Règle du parallélogramme

A, B, C sont 3 points quelconques de $\mathcal{E}$.
En notant D le point tel que le quadrilatère ABDC soit un parallélogramme, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.



7°) Règle du parallélépipède

ABCDEFGH est un parallélépipède (les 6 faces sont des parallélogrammes).



On a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG}$.

Démonstration :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ car ABCD est un parallélogramme.
D'où $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$.

8°) Barycentre dans l'espace

On définit le barycentre de plusieurs points dans l'espace de la même manière que dans le plan.

Les propriétés sont les mêmes que dans le plan.

II. Vecteurs colinéaires

1°) Définition

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont **colinéaires** pour exprimer que
- soit ils sont tous les deux non nuls et ont la même direction
- soit l'un au moins des deux vecteurs est nul.

2°) Règle (admise sans démonstration)

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont 2 vecteurs quelconques de l'espace tels que $\vec{u} \neq \vec{0}$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si il existe un réel λ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

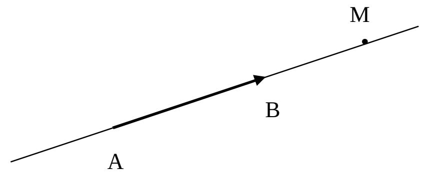
3°) Propriété

A, B, C sont 3 points quelconques de $\mathcal{E}$.
A, B, C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

III. Droites de l'espace

1°) Théorème de caractérisation vectorielle

A et B sont 2 points distincts de $\mathcal{E}$.
M est un point quelconque de $\mathcal{E}$.



$\mathrm{M} \in (\mathrm{AB}) \Leftrightarrow$ A, B, M alignés
$\mathrm{M} \in (\mathrm{AB}) \Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires

Or $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ donc

$\mathrm{M} \in (\mathrm{AB}) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\, \overrightarrow{AB}$.

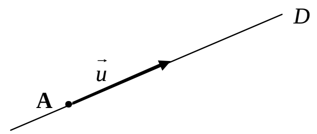
« Il existe »

2°) Conséquence du théorème de caractérisation

L'ensemble des points $\mathrm{M} \in \mathcal{E}$ pour lesquels il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\, \overrightarrow{AB}$ est la droite (AB).

3°) Définition vectorielle d'une droite de l'espace

A est un point quelconque de l'espace.
$\vec{u}$ est un vecteur non nul.



- L'ensemble des points $\mathrm{M} \in \mathcal{E}$ pour lesquels il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\, \vec{u}$ est une droite *D*.
- On dit que *D* est la droite de **repère** $(\mathrm{A}, \vec{u})$.

  origine **vecteur unité**
- Le réel λ est appelé l'**abscisse** du point M dans le repère $(\mathrm{A}, \vec{u})$.

4°) Définition d'un vecteur directeur d'une droite

Un **vecteur directeur** d'une droite *D* de l'espace est un vecteur non nul qui a la même direction que *D*.

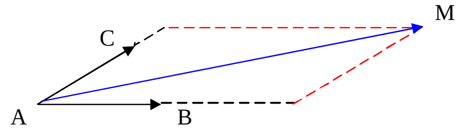
IV. Plans de l'espace

1°) Rappel

Un plan de l'espace est défini par :
- 3 points non alignés
- 2 droites sécantes
- 1 droite et un point n'appartenant pas à cette droite

2°) Théorème de caractérisation vectorielle d'un plan de l'espace

A, B, C sont trois points quelconques non alignés de l'espace.
M est un point quelconque de l'espace.



$\mathrm{M} \in (\mathrm{ABC}) \Leftrightarrow$ il existe deux réels λ et μ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\, \overrightarrow{AB} + \mu\, \overrightarrow{AC}$.

3°) Démonstration de la partie directe

- **Hypothèses :** $\mathrm{M} \in (\mathrm{ABC})$
- **But :** Démontrer qu'il existe deux réels λ et μ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\, \overrightarrow{AB} + \mu\, \overrightarrow{AC}$

• **Démonstration :**

A, B, C ne sont pas alignés donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
On en déduit que $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ est un repère du plan (ABC).

$M \in (ABC)$ par hypothèse donc il possède des coordonnées cartésiennes x_M et y_M dans ce repère.

Par suite, $\overrightarrow{AM} = x_M\ \overrightarrow{AB} + y_M\ \overrightarrow{AC}$.

On pose $\begin{cases} x_M = \lambda \\ y_M = \mu \end{cases}$.

On obtient $\overrightarrow{AM} = \lambda\ \overrightarrow{AB} + \mu\ \overrightarrow{AC}$.

4°) Démonstration de la partie réciproque

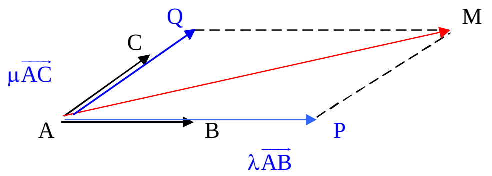
• **Hypothèses :** M est un point de l'espace pour lequel il existe deux réels λ et μ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\ \overrightarrow{AB} + \mu\ \overrightarrow{AC}$.

• **But :** Démontrer que $M \in (ABC)$.

• **Démonstration :**

Notons P le point tel que $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$

et Q le point tel que $\overrightarrow{AQ} = \mu\overrightarrow{AC}$.



$P \in (AB)$ donc $P \in (ABC)$.

$Q \in (AC)$ donc $Q \in (ABC)$.

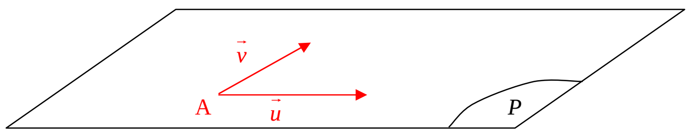
Or $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}$.
Par suite, APMQ est un parallélogramme.
Comme A, P, Q appartiennent au plan (ABC), on en déduit que $M \in (ABC)$.

5°) Conséquence du théorème

L'ensemble des points $M \in \boldsymbol{E}$ pour lesquels il existe deux réels λ et μ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\ \overrightarrow{AB} + \mu\ \overrightarrow{AC}$ est le plan (ABC).

6°) Définition vectorielle d'un plan

A est un point quelconque de l'espace.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires de l'espace.



• L'ensemble des points $M \in \boldsymbol{E}$ pour lesquels il existe deux réels λ et μ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\ \vec{u} + \mu\ \vec{v}$ est un plan P de l'espace.

• On dit que P est le plan de **repère** $\left(A, \vec{u}, \vec{v}\right)$

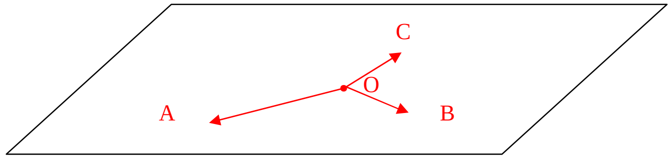
origine **vecteurs de base**

V. <u>Vecteurs coplanaires</u>

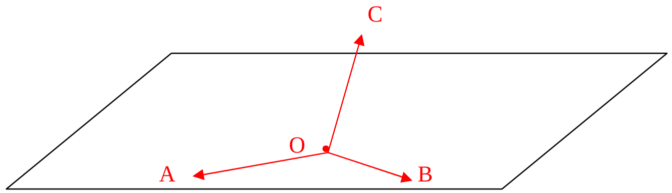
1°) Définition

On dit que 3 vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de l'espace sont **coplanaires** pour exprimer que, O étant un point fixé, les 4 points :
O ;
A tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$;
B tel que $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$;
C tel que $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$

sont dans un même plan.



Les points O, A, B, C sont coplanaires.



Les points O, A, B, C ne sont pas coplanaires.

Les <u>**3**</u> vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ sont coplanaires signifie que les <u>**4**</u> points O, A, B, C sont coplanaires.

Les <u>**3**</u> vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ ne sont pas coplanaires signifie que les <u>**4**</u> points O, A, B, C ne sont pas coplanaires.

2°) Propriété
(découle du théorème de caractérisation vectorielle d'un plan)

Comment démontrer que trois vecteurs sont coplanaires par calcul vectoriel

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont 3 vecteurs quelconques de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **ne sont pas colinéaires.**
$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels λ et μ tels que $\vec{w} = \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v}$.

3°) Méthode

Pour déterminer si 3 vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires sachant que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **ne sont pas colinéaires, on cherche s'**il existe deux réels λ et μ tels que $\vec{w} = \lambda\,\vec{u} + \mu\,\vec{v}$.
La propriété du 2°) permet de démontrer que 3 vecteurs sont coplanaires par calcul vectoriel.

VI. Lieux géométriques de référence dans l'espace liés aux distances

1°) Ensemble des points de l'espace tels que AM = *R*

(A point fixé ; $R > 0$ fixé)
Sphère de centre A et de rayon *R*.

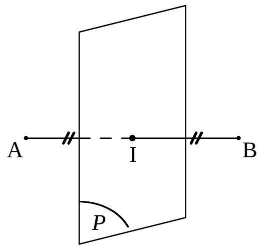
2°) Ensemble des points M de l'espace tels que MA = MB

(A et B points fixés distincts)
Plan médiateur du segment $[\mathrm{AB}]$.
(Plan perpendiculaire au segment $[\mathrm{AB}]$ en son milieu).

VII. Appendice : plan médiateur d'un segment

1°) Définition

A et B sont deux points fixés distincts de l'espace.
On appelle **plan médiateur** du segment $[\mathrm{AB}]$ **le plan passant par le milieu I de $[\mathrm{AB}]$ et orthogonal à (AB).**



2°) Propriété caractéristique (admise sans démonstration)

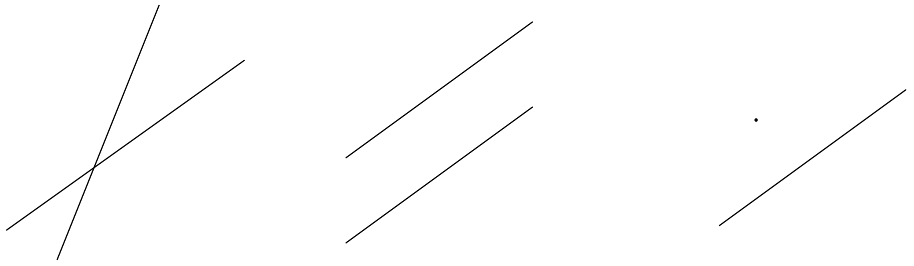
Un point M appartient au plan médiateur d'un segment si et seulement si il est équidistant des extrémités de ce segment.

Vecteurs coplanaires

Rappel

Un plan de l'espace est caractérisé par

- trois points non alignés
ou
- par deux droites sécantes (donc coplanaires)
ou
- deux droites strictement parallèles ;
ou
- une droite et un point n'appartenant pas à la droite



COPLANAIRE signifie « dans un même plan ».

2 ou 3 points sont toujours coplanaires
4 points sont coplanaires ou ne le sont pas.

Définition

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteur de l'espace.
Soit A, B, C, D quatre points tels que

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$
$\vec{v} = \overrightarrow{AC}$
$\vec{w} = \overrightarrow{AD}$

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires si A, B, C, D coplanaires.
$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires si A, B, C, D ne sont pas coplanaires.

Figures

Remarque

2 vecteurs sont toujours coplanaires

Propriété 1

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont trois vecteur de l'espace.

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si l'un des 3 est combinaison linéaires des 2 autres c'est-à-dire

soit il existe deux réels a et b tels que $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$
soit il existe deux réels a et b tels que $\vec{v} = a\vec{u} + b\vec{w}$
soit il existe deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$

Propriété 2

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont trois vecteur de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont NON colinéaires.

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.