1ère S Chapitre 32 Généralités sur les suites (1)

Suites

Vocabulaire

Sens de variation

Suites arithmétiques géométriques

Limites de suites

I. Présentation du chapitre

1°) Difficultés du chapitre

- le vocabulaire
- les notations
- les formules
- le calcul algébrique

Chapitre assez abstrait au début.

2°) Quelques utilisation des suites

Modélisation de situations :

- Situations économiques (intérêts bancaires)
- Situations démographiques
- Situations géométriques

On étudiera des phénomènes chronologiques.

Il y a beaucoup d'autres utilisations qui seront vues en exercices.

3°) Lien avec les fonctions

Les suites ressemblent beaucoup aux fonctions mais avec des spécificités propres.

II. Exemples introductifs

1°) Exemple 1 (suites logiques)

On considère les listes de nombres suivants construits sur un principe logique.

L_1	**1 ; 4 ; 7 ; 10 ; 13 ; 16 ; 22**	On ajoute 3 à chaque fois.
L_2	**2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; 64 ; 128 ; 256**	On multiplie par 2 à chaque fois.
L_3	**15 ; 11 ; 7 ; 4 ; 3 ; –1 ; –5 ; –9 ; –13**	On enlève 4 à chaque fois.
L_4	**40 ; 20 ; 10 ; 5 ; 2,5**	On divise par 2 à chaque fois.
L_5	**1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36 ; 49 ; 64**	Carrés parfaits
L_6	**3 ; 4 ; 6 ; 9 ; 13 ; 18 ; 24 ; 31**	+1, +2, +3, +4, +5…

On adopte une notation.
On désigne par :
u_0 le premier terme de la suite
u_1 le deuxième terme de la suite
u_2 le troisième terme de la suite
etc…

(notation indicielle ou indexée)

C'est une première bizarrerie que l'on observe sur les suites : u_0 est le premier terme de la suite, u_1 le deuxième terme de la suite, u_2 le troisième terme de la suite etc.

Dans la liste L_3, $u_3 = 10$
Dans la liste L_5, $u_4 = 25$

2°) Exemple 2 (phénomène chronologique)

L'étude d'une population fait apparaître une augmentation de 1 % par mois à partir du 1er janvier 2000.
On se propose d'étudier l'évolution de cette population chaque mois sachant que cette population est de 100 000 individus le 1er janvier 2000.

Population au 1er février 2000 : 100 000 × $\boxed{1{,}01}$ = 101 000

Population au 1er mars 2000 : 101 000 × $\boxed{1{,}01}$ = 102 010

On note P_0 la population au 1er janvier 2000
P_1 la population au 1er février 2000
P_2 la population au 1er mars 2000
etc.

Exemples

La population au 1er mars 2001 est donc P_{14}
P_{25} désigne la population au 1er février 2002.

$P_{n+1} = P_n \times \boxed{1{,}01}$

III. Définition et vocabulaire

1°) Définition mathématique d'une suite

> Une **suite numérique** est une fonction u qui à tout entier naturel n associe un nombre réel noté $u(n)$ ou u_n (« u indice n »)
> $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
> $n \mapsto u_n$

Rappel : une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

2°) Notations

- La suite u est souvent notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Les images sont souvent notées u_0, u_1, u_2 au lieu de $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$...
- Ce sont les **termes** de la suite.

Attention : u_n désigne le terme d'indice *n*.

$$\left.\begin{array}{l} u(n) : \text{" } u \text{ de } n \text{ "} \\ u_n : \text{" } u \text{ indice } n \text{ "} \end{array}\right\} \textbf{ même chose}$$

$u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (<u>les parenthèses sont obligatoires</u>)

Quand il n'y a pas de parenthèses, c'est pour définir le nombre.
Quand il y a des parenthèses, c'est pour définir la fonction.

3°) Exemple

$$\left|\begin{array}{l} u \\ (u_n) \end{array}\right. \text{ est la suite définie par } \forall n\in\mathbb{N} \quad u_n=n^2+2n-3$$

$$\begin{array}{l} u:\mathbb{N}\to\mathbb{R} \\ \quad n\mapsto n^2+2n-3 \end{array}$$

Calculons les trois premiers termes.

$u_0=u(0)=0^2+2\times0-3=-3$
$u_1=u(1)=0$
$u_2=u(2)=5$

4°) Remarques sur les indices

u_n : terme d'indice n
(n est un entier naturel, u_n est un réel)

u_{n+1} : terme d'indice n+1, **terme suivant**
u_{n-1} : terme d'indice n–1, **terme précédent** $(n\geq1)$

On dira que u_{n-1}, u_n, u_{n+1} sont des **termes consécutifs** de la suite.

Exemple

3, 4, 5, 6, 7 sont des entiers consécutifs
u_3, u_4, u_5, u_6, u_7 sont des termes consécutifs

Attention

Pour une suite qui commence par l'indice 0
est définie à partir de l'indice 0

- le 100ème terme est u_{99}
- le 1000ème terme est u_{999}

Récapitulatif

- suite : u, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (2 notations)
- indice
- terme

Successeur d'un entier

n+1 : **successeur** de n

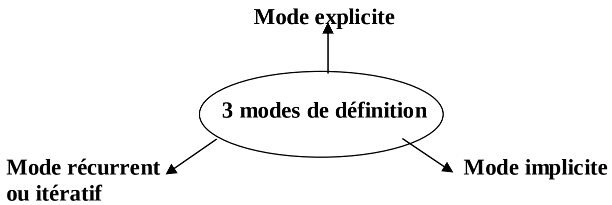
(à voir comme une fonction non comme une addition)

$n \to n+1$
$n+1 \to n+2$
$n-1 \to n$
$n-2 \to n-1$

u_n, u_{n-1}, u_{n+1} : expressions globales

IV. <u>Différentes manière de définir une suite</u>

Il y en a trois principales.



1°) Par une formule explicite
Mode explicite ou fonctionnel

● **Principe**

On définit une suite $\left| \begin{array}{l} u \\ (u_n) \end{array} \right.$ de façon explicite lorsque l'on exprime le terme général u_n en fonction de l'indice *n*.

(Même chose que pour les fonctions où l'on définit $f(x)$ en fonction de *x*).

● **Exemple 1**

$\left| \begin{array}{l} u \\ (u_n) \end{array} \right.$ est la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n = n^2 + 2n - 3$

Repasser en rouge le *n* qui est en indice à gauche et le *n* qui est dans l'expression à droite.

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto n^2 + 2n - 3$$

Calculons les trois premiers termes.

$u_0 = u(0) = 0^2 + 2 \times 0 - 3 = -3$

$u_1 = u(1) = 0$

$u_2 = u(2) = 5$

La suite *u* est définie $\left| \begin{array}{l} \text{sur } \mathbb{N} \\ \text{à partir de l'indice } 0 \end{array} \right.$.

● **Exemple 2**

$\left| \begin{array}{l} u \\ (u_n) \end{array} \right.$ est la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^* \;\; u_n = \dfrac{3-n}{n}$

La suite *u* est définie $\left| \begin{array}{l} \text{sur } \mathbb{N}^* \\ \text{à partir de l'indice } 1 \end{array} \right.$.

$u_1 = 1$

$u_2 = \dfrac{1}{2}$

● **Exemple 3**

$\left| \begin{array}{l} u \\ (u_n) \end{array} \right.$ est la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n = 5 \times 2^n - 3$

La suite *u* est définie $\left| \begin{array}{l} \text{sur } \mathbb{N} \\ \text{à partir de l'indice } 0 \end{array} \right.$.

$u_0 = 5 \times 2^0 - 3 = 5 \times 1 - 3 = 2$

$u_1 = 5 \times 2^1 - 3 = 5 \times 2 - 3 = 7$

On rencontrera des suites dont le terme général est exprimé en fonction de *n* à l'aide de puissances.
(Il ne faut pas être choqué : une expression avec des puissances où *n* est en exposant est bien une expression du terme général en fonction de *n*).

2°) Mode par compréhension (implicite)

● **Exemple 1**

$u_n = n$-ième décimale de π ($n \geq 1$)
π = 3,14155926…

$u_1 = 1$

$u_2 = 4$

$u_3 = 1$

● **Exemple 2**

$u_n = n -$ième nombre pair ($n \geq 1$)

$u_1 = 0$

$u_2 = 2$

● **Exemple 3**

$u_n = n -$ième nombre premier ($n \geq 1$)

$u_1 = 2$

$u_2 = 3$

● **Exemple 4**

$u_n =$ salaire au bout de *n* mois (voir exercices plus tard)

3°) Mode récurrent ou itératif

● Principe

On définit une suite $\left| \begin{array}{l} u \\ (u_n) \end{array} \right.$ de façon **récurrente** lorsque l'on exprime le terme u_n (d'indice *n*) en fonction du précédent u_{n-1} (d'indice $n-1$) .

(Nouvelle définition par rapport aux fonctions)

$$\begin{cases} u_0 \\ u_n = f(u_{n-1}) \quad \text{ou} \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

$$u_0 \overset{f}{\mapsto} u_1 \overset{f}{\mapsto} u_2 \overset{f}{\mapsto} u_3 \overset{f}{\mapsto} u_4 \mapsto \ldots$$

● Exemple

$\left| \begin{array}{l} u \\ (u_n) \end{array} \right.$ est la suite définie par :

$u_0 = 4$ (1$^{\text{er}}$ terme)
et
la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 2u_n - 3$.

Recopier en rouge le *n* en indice à gauche et le *n* en indice à droite.

$$u(n+1) = 2u(n) - 3$$

Calcul de premiers termes

$u_0 = 4$
$u_1 = u_{0+1} = 2 \times u_0 - 3 = 2 \times 4 - 3 = 5$
$u_2 = u_{1+1} = 2 \times u_1 - 3 = 2 \times 5 - 3 = 7$
$u_3 = u_{2+1} = 2 \times u_2 - 3 = 2 \times 7 - 3 = 11$

Le but de beaucoup d'exercices est souvent de passer d'un mode récurrent ou par compréhension à un mode explicite.

Le calcul des termes pour une suite définie par récurrence peut être automatisé sur ordinateur en utilisant un tableur.

V. Liens entre suites et fonctions

1°) Mode explicite

Etant donnée une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, on peut définir une suite *u* de manière explicite en posant $u_n = f(n)$.

Exemple « concret » :

$f : x \mapsto 2x + 3$

$u_n = f(n) = 2n + 3$

2°) Mode récurrent

Etant donnée une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on peut définir une suite *u* sur $\mathbb{N}$ de manière récurrente par :
$\begin{cases} \text{la valeur de } u_0 \\ \text{la relation } u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

Exemple :

$f : x \mapsto 2x + 3$

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(u_n) = 2u_n + 3 \end{cases}$$

3°) Exemples

① $u_n = 2n^2 + 3n - 5$
$u_n = f(n)$ avec $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$

② $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = (u_n)^2 - 3u_n + 1 \end{cases}$

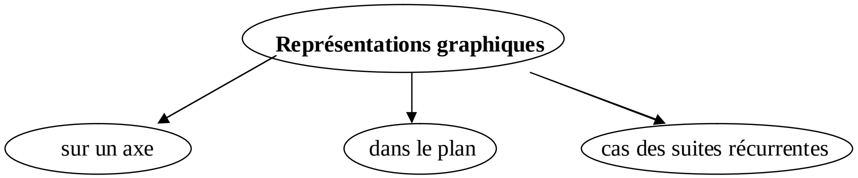
$u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = x^2 - 3x + 1$

③ $u_n = 2^n$
$u_n = f(n)$ avec $f(x) = 2^x$

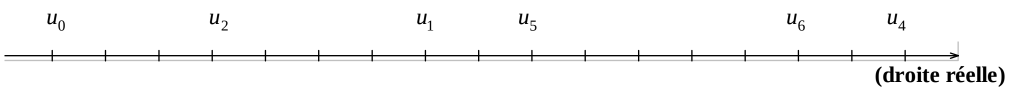
Cette fonction n'est pas connue en 1$^{\text{ère}}$.

VI. Représentations graphiques

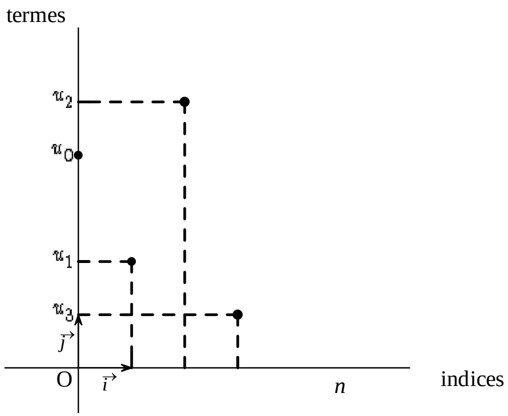
Schéma



1°) Représentation graphique sur un axe gradué



2°) Représentation graphique dans un repère du plan



La suite u est représentée graphiquement par les points d'abscisse entière n et d'ordonnée u_n.

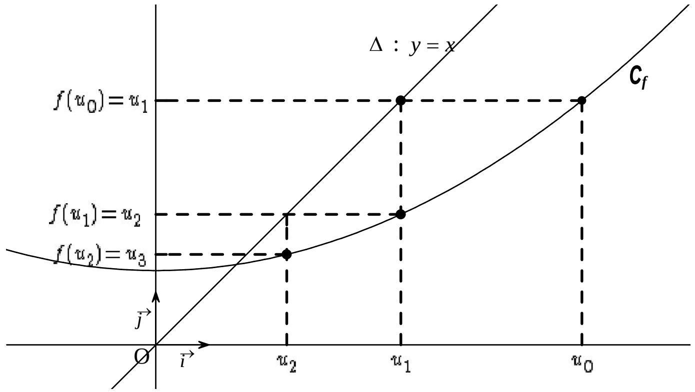
La suite u est représentée par des points isolés (« **nuage de points** »).

3°) Lecture graphique des termes d'une suite récurrente

f est une fonction.

(u_n) est la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné} \quad \text{(terme initial)} \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$



Méthode

Dans un repère, on trace :

- la représentation graphique C_f de f
- la droite Δ d'équation $y = x$ (« 1ère bissectrice » du repère ou « droite à 45 ° » lorsque le repère est orthonormé).

En général, on prend le repère orthonormé mais cela n'est pas obligatoire.

Recette

- On place u_0 sur l'axe des abscisses.
- On monte u_0 jusqu'à C_f.
- On obtient u_1 en ordonnée car $u_1 = f(u_0)$.
- On rallonge jusqu'à Δ.
- On redescend en abscisse ; on obtient la valeur de u_1.
- On recommence avec u_1 et ainsi de suite.

Il s'agit d'une construction des termes d'une suite récurrente **sans calcul**.
Suivant les cas, on obtient une construction en « marche d'escalier » ou « en spirale » (« en escargot »).

VII. Calculs d'indices

1°) Suites définies par une formule explicite

● Exemple 1

(u_n) est la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = n^2 + 2n - 3$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (n+1)^2 - 2(n+1) + 3 \\ &= n^2 + 2n + 1 - 2n - 2 + 3 \\ &= n^2 + 2 \end{aligned}$$

$u_{n-1}=(n-1)^2-2(n-1)+3 \quad (n\geq 1)$
$=n^2-2n+1-2n+2+3$
$=n^2-4n+6$

• Exemple 2

$\left| \begin{array}{l} u \\ (u_n) \end{array} \right.$ est la suite définie par $\forall n\in\mathbb{N}\ \ u_n=\dfrac{2n-1}{n+4}$.

$$u_{n+1}=\frac{2(n+1)-1}{(n+1)+4}=\frac{2n+1}{n+5}$$

2°) Suites définies par récurrence

• Exemple 1

$\left| \begin{array}{l} u \\ (u_n) \end{array} \right.$ est la suite définie par : $\begin{cases} u_0=5 \\ \forall n\in\mathbb{N}\ \ u_{n+1}=2u_n-3 \end{cases}$.

Exprimer u_{n+2} en fonction u_{n+1}.

$u_{n+2}=2u_{n+1}-3$

• Exemple 2

$\left| \begin{array}{l} u \\ (u_n) \end{array} \right.$ est la suite définie par : $\begin{cases} u_0=2 \\ \forall n\in\mathbb{N}\ \ u_{n+1}=6-u_n \end{cases}$.

$$u_{n+2}=6-u_{n+1}=6-(6-u_n)=u_n$$

Donc *u* est une suite périodique de période 2.

• Exemple 3

$\left| \begin{array}{l} u \\ (u_n) \end{array} \right.$ est la suite définie par : $\begin{cases} u_0=3 \\ \forall n\in\mathbb{N}\ \ u_{n+1}=\dfrac{5}{u_n} \end{cases}$.

$$u_{n+2}=\frac{5}{u_{n+1}}=\frac{5}{\frac{5}{u_n}}=5\times\frac{u_n}{5}=u_n$$

Donc *u* est une suite périodique de période 2.

3°) Suite définie en fonction d'une autre

Exemple

u est une suite donnée.

v est la suite définie par $\forall n\in\mathbb{N}\ \ v_n=u_n+4$.

$v_{n+1}=u_{n+1}+4$

VIII. <u>Sens de variation d'une suite</u>

1°) Définitions

u est une suite.

- On dit que *u* est **croissante** pour exprimer que pour tout entier naturel *n* : $u_n\leq u_{n+1}$.
- On dit que *u* est **décroissante** pour exprimer que pour tout entier naturel *n* : $u_n\geq u_{n+1}$.
- On dit que *u* est **constante** pour exprimer que pour tout entier naturel *n* on a : $u_n=u_{n+1}$.

2°) Vocabulaire

- On dit que *u* est **monotone** lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante
- On dit que *u* est **strictement monotone** lorsqu'elle est soit strictement croissante, soit strictement décroissante

3°) Remarques

• Une suite constante est monotone : elle est à la fois croissante et décroissante (mais elle ne l'est pas strictement).

• Une suite peut être monotone à partir d'un certain indice. Dans ce cas, on se moque de ce qui se passe pour les premiers termes ; ce qui est intéressant c'est ce qui se passe à partir d'un certain indice jusqu'à $+\infty$.

• Une suite peut être constante à partir d'un certain indice n_0. On dit qu'elle est **stationnaire à partir de l'indice n_0.**
Dans ce cas, on se moque de ce qui se passe pour les premiers termes ; ce qui est intéressant c'est ce qui se passe à partir d'un certain indice jusqu'à $+\infty$.

4°) Méthodes d'étude du sens de variation d'une suite

Voir chapitre suivant.

COMMENTAIRE ORAL

$u_0 = -3$
$u_1 = 0$
$u_2 = 5$
$u_3 = 12$

$\mathbb{N}$ est un ensemble ordonné avec un plus petit élément qui est 0 (1er élément), un deuxième élément (1), un troisième élément (2) etc.

Donc on va pouvoir ordonner les termes de la suite.
Ce qui n'était pas possible avec les fonctions.

On voit que les indices on fait chaque fois +1, +1, +1 …pour les indices.

Pour les images, cela ne se répercute pas comme ça.

Pour les images, on fait chaque +3, +5, +7 ….

Comprendre le « fonctionnement » d'une suite définie par récurrence.

Le fonctionnement d'une suite définie par récurrence peut être comparé à celui d'une machine.

Le calcul des termes est algorithmique c.-à-d. ?

Une phrase peut être quantifiée implicitement (comme pour les fonctions)

Par exemple, quand on dit « Soit u la suite définie par $u_n = 3n^2 + 2n - 1$. »

Suites définies par récurrence : calcul automatisé

$\downarrow$

tableur

---

u_n, u_{n-1}, u_{n+1}

expressions globales