1[ère] S Chapitre 33 — Limites de fonctions (4) : asymptotes obliques, études de fonctions

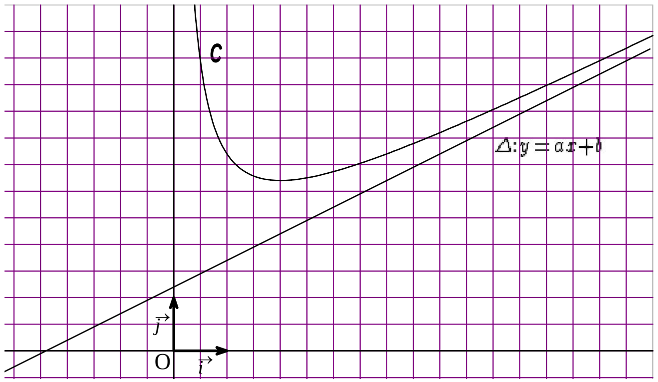
On a vu dans un chapitre précédent sur les limites la notion d'asymptote qui permettait de relier les limites et les graphiques.
On a d'abord donné une définition générale (« définition poétique ») puis on s'est ensuite intéressé à deux types d'asymptotes : les asymptotes horizontales et verticales.
On a vu plus particulièrement comment les reconnaître à l'aide des limites.

Dans ce chapitre, on va pousser et clore l'étude des asymptotes en étudiant un dernier type d'asymptote : **les asymptotes obliques**.

I. Approche graphique

1°) Observation d'un graphique

On donne ci-dessous :
- la représentation graphique $\mathcal{C}$ d'une fonction f ;
- une droite Δ d'équation réduite $y = ax + b$ (a et b étant deux réels tels que $a \neq 0$; la droite Δ n'est donc ni parallèle à l'axe des abscisses ni parallèles à l'axe des ordonnées).



On va observer la branche infinie de $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

2°) Que peut-on dire de $\mathcal{C}$ et de Δ lorsque x tend vers $+\infty$?

Il semble que la courbe $\mathcal{C}$ se rapproche de plus en plus de la droite Δ lorsque x tend vers $+\infty$.
On dit que la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ pour **asymptote oblique en $+\infty$** (on précise « oblique » car le coefficient directeur de Δ est non nul).

3°) On admet que cette conjecture est vraie. Comment peut-on traduire ce résultat à l'aide d'une limite ?

On va d'abord interpréter une quantité.

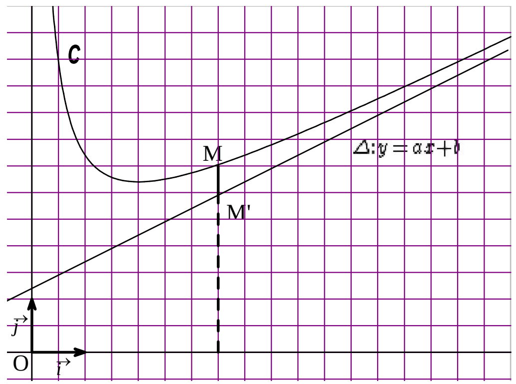
a) Interprétation d'une quantité

On note M le point de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisse x et M' le point de la droite Δ d'abscisse x.
MM' peut se mesurer sur l'axe des ordonnées ; elle est égale à la valeur absolue de la différence des ordonnées de M et M'.

$\text{MM'} = \left| f(x) - (ax+b) \right|$.

b) Résultat d'une limite

Le fait que la courbe $\mathcal{C}$ se rapproche de plus en plus de la droite Δ lorsque x tend vers $+\infty$ peut se traduire par le fait que la distance MM' tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.
Donc le fait que la courbe $\mathcal{C}$ se rapproche de plus en plus de la droite Δ lorsque x tend vers $+\infty$ peut se traduire par : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (ax+b) \right] = 0$



On obtiendrait un résultat analogue pour une asymptote oblique en $-\infty$: $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - (ax+b) \right] = 0$.

II. Comment reconnaître une asymptote oblique

1°) Règle

On note $\mathcal{C}$ la représentation graphique d'une fonction f dans le plan muni d'un repère.
Δ est une droite d'équation réduite $y = ax + b$ (a et b étant deux réels tels que $a \neq 0$)

- On dit que la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ pour **asymptote oblique** en $+\infty$ lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (ax+b) \right] = 0$.
- On dit que la courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ pour **asymptote oblique** en $-\infty$ lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (ax+b) \right] = 0$.

2°) Retenir

Pour une AO (tout comme pour une AH), on précise en $+\infty$ ou en $-\infty$.

3°) Application

Dans les exercices, on donne une fonction et on demande de démontrer que sa représentation graphique admet une droite donnée pour asymptote oblique.

- On calcule la différence entre l'expression de la fonction et l'équation de la droite.
- On détermine la limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ (suivant la question) ; il faut démontrer que cette limite est égale à 0.
- On conclut.

III. Exemple

$f : x \mapsto x - 2 + \frac{4}{x-1}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Démontrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet la droite Δ d'équation $y = x-2$ pour asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$. Etudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ.

Méthode :

① On calcule la différence

$$f(x) - (x-2) = x - 2 + \frac{4}{x-1} - (x-2)$$
$$= \frac{4}{x-1}$$

Le "$ax+b$"est donné dans l'énoncé ; l'expression $ax+b$ annule l'expression qui est devant.

② On calcule la limite

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} 4 = 4 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} (x-1) = +\infty \end{array}\right\} \text{ donc par limite d'un quotient } \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x-1} = 0.$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - (x-2) \right] = 0$.

On démontrerait de même que $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[f(x) - (x-2) \right] = 0$.

Pour démontrer que la courbe admet une asymptote oblique, on est obligé de calculer une limite. La limite doit obligatoirement être égale à 0.

③ On conclut (**rédaction-type**)

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet la droite Δ d'équation $y = x-2$ pour asymptote oblique <u>en $+\infty$ et en $-\infty$</u>.

On a la même asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$; en général, c'est toujours le cas en 1[ère].

④ Position relative

On étudie le signe de la différence $f(x) - (x-2) = \frac{4}{x-1}$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
SGN de 4	+		+
SGN de $x-1$	$-$	0	+
SGN de $\frac{4}{x-1}$	$-$	‖	+
Position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ	La courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de Δ.	‖	La courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de Δ.

(On peut aussi rédiger la position relative.)

La position relative sert juste pour le graphique. **Détail sur la position relative :** Si le résultat de la différence $f(x) - (ax+b)$ est strictement positif, alors la courbe est située au-dessus de la droite. De manière analogue, si le résultat de la différence $f(x) - (ax+b)$ est strictement négatif, alors la courbe est située au-dessous de la droite.

Remarque orthographique

Les mots « au-dessous » et « au-dessus » prennent un trait d'union.
En revanche, en dessous et en dessus ne prennent pas de trait d'union.

Remarque de vocabulaire

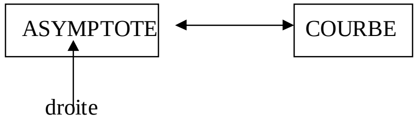
On parle de la position relative de la courbe et de l'asymptote ou de la position (tout court) de la courbe par rapport à l'asymptote).

IV. Bilan sur les branches infinies et les asymptotes

Rapport entre les limites et les asymptotes
Comment reconnaître des asymptotes

	Lorsque	La courbe $\mathcal{C}_f$ admet la droite Δ d'équation
1°) Asymptote horizontale	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ (ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$)	$y = a$ pour asymptote horizontale en $+\infty$ (ou en $-\infty$)
2°) Asymptote verticale	$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$	$x = a$ pour asymptote verticale
3°) Asymptote oblique	$\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - (ax+b) \right] = 0$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[f(x) - (ax+b) \right] = 0$	$y = ax+b$ pour asymptote oblique en $+\infty$ ou en $-\infty$ N.B. : on peut avoir une asymptote oblique en $+\infty$ ou en $-\infty$ ou les deux

Rappel



- Si le résultat n'est pas égal à 0, alors la droite n'est pas une A.O.

- On ne précise pas 0^+ ou 0^-.