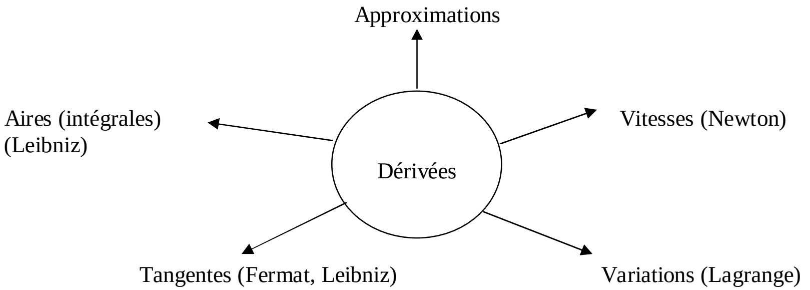
1ère S Chapitre 31 Compléments sur les dérivées

L'un des objectifs du cours est de revoir la notion de nombre dérivé avec la notion de limite qui n'était alors pas connue lorsque l'on a vu la 1ère fois la notion de vitesse instantanée et d'aborder des notions que l'on n'auraient pas pu voir à l'époque.
Un autre objectif est de voir une application concrète des dérivées avec les vitesses instantanées et de comprendre comment les dérivées permettent de définir la notion de vitesse instantanée dans le cas d'un mouvement rectiligne.



Notion centrale : notion d'accroissement (taux d'accroissement).

I. <u>Définition du nombre dérivé d'une fonction</u>

1°) Définition (fonction dérivable en un réel ; nombre dérivé)

> I est un intervalle.
> f est une fonction définie sur I.
> a est un réel fixé dans I.
>
> On dit que f est **dérivable en a** lorsque $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est un réel (fini).
>
> Cette limite est appelée **le nombre dérivé** de f en a ; on le note $f'(a)$.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

2°) Remarques

- Le résultat de la limite est fini.
  Si le résultat de la limite est égal à $+\infty$ ou à $-\infty$, alors la fonction f n'est pas dérivable en a.

- La définition sert surtout à étudier la dérivabilité en un réel particulier et à démontrer des théorèmes.

2°) Autre formule

$$\boxed{f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

(N.B. : $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est le **taux de variation** de f entre a et x.)

On pose $x=a+h \Leftrightarrow h=x-a$
$x\to a \Leftrightarrow h\to 0$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$f'(a)=\begin{cases}\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\\[2ex]\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\end{cases}$$

3°) Remarque

Lorsque f est dérivable en a,

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)-f(a)\right]=0\\ \lim\limits_{x\to a}(x-a)=0\end{cases}$$

Lorsque l'on cherche la limite du quotient $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, on rencontre une FI du type « $\dfrac{0}{0}$ ».

4°) Exemple de fonction non dérivable

$f:\ x\mapsto\sqrt{x}$

$\mathcal{D}_f=\mathbb{R}_+$

On a vu que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\quad f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Etudions la dérivabilité de f en 0 (à droite).

$\forall h>0\quad \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\dfrac{\sqrt{h}-\sqrt{0}}{h}=\dfrac{\sqrt{h}}{h}=\dfrac{\sqrt{h}}{\sqrt{h}\times\sqrt{h}}=\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ (ou $\forall x>0\quad \dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{h\to 0^+}(1)=1\\ \lim\limits_{h\to 0^+}\sqrt{h}=0^+\end{array}\right\}\text{ donc par quotient }\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{h}}=+\infty$$

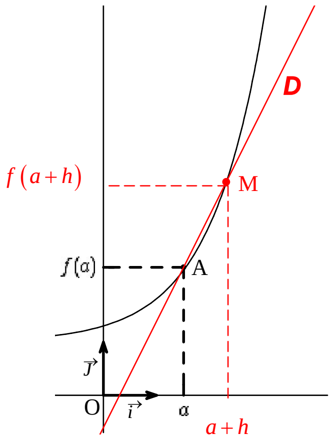
Cette limite n'est pas un réel fini donc la fonction f n'est pas dérivable en 0 (à droite).

II. Notation de Leibniz

1°) Notation

On peut noter $f'(x)=\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$

2°) Explication



Le coefficient directeur de la droite (AM) est égal à :

$$m=\frac{y_{\mathrm{M}}-y_{\mathrm{A}}}{x_{\mathrm{M}}-x_{\mathrm{A}}}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Or on fait tendre h vers 0, on une « petite » différence, notée d à la place de Δ $\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$.

Or $y=f(x)$ donc la limite de m lorsque $h\to 0$ est égale à $f'(x)=\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$.

3°) Intérêt en sciences physiques (voir Terminale)

Précise la variable par rapport laquelle on dérive.

III. Vitesse instantanée pour un mouvement rectiligne
(étude mathématique au programme)

Les élèves connaissent différentes notions sur les vitesses.

- vitesse moyenne
- vecteur-vitesse

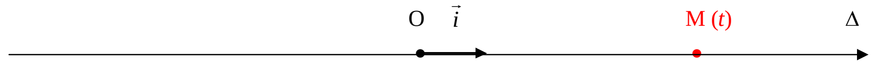
Ce chapitre établit un lien entre mathématiques et physique.

L'étude des mouvements en physique s'appelle la cinématique.

1°) Loi horaire d'un mouvement rectiligne (point mobile sur un axe)

M est un point mobile sur Δ.

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=x_{\mathrm{M}}\vec{i}$



- L'abscisse de M dans le repère $(\mathrm{O},\vec{i})$ est notée $x_{\mathrm{M}}=x(t)$.
- La fonction $x:\begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ t\mapsto x(t)\end{array}$ est appelée « **loi horaire** » du mouvement.

La variable est notée t ; il s'agit du temps.

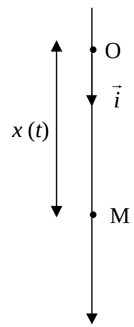
La **trajectoire** du point M est une portion de la droite Δ.

2°) Exemples de lois horaires

① $x(t)=t^2+t-2$

$x(0)=-2$
$x(1)=0$
$x(2)=4$

② $x(t)=\dfrac{1}{2}gt^2$ (loi de la chute libre dans l'air établie par Galilée)

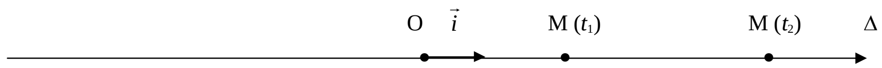


$g\approx 9{,}81\ \mathrm{N.kg^{-1}}$ (ou $\mathrm{m.s^{-2}}$)
t en s

Ainsi $x(t)\approx 5t^2$.

3°) Vitesse moyenne

Même hypothèse que précédemment.



> La vitesse moyenne de M entre les instants t_1 et t_2 est égale à : $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\dfrac{x(t_2)-x(t_1)}{t_2-t_1}$.

La vitesse moyenne est un nombre positif ou négatif.

4°) Exemple de calcul de vitesse moyenne

$x(t)=t^2+t-2$

Calcul de la vitesse moyenne entre les instants 1 et3.

$v=\dfrac{x(1)-x(3)}{1-3}=\dfrac{0-10}{-2}=\dfrac{-10}{-2}=5$ (pas d'unité, car nous sommes en mathématiques)

5°) Vitesse instantanée (définition mathématique)

> On suppose que la fonction x : $t \mapsto x(t)$ est dérivable.
> Par définition, la vitesse instantanée de M à l'instant t est égale à $x'(t)$ (nombre dérivé de x en t).

La vitesse instantanée est un nombre positif ou négatif.

6°) Justification de la définition

On cherche à définir la vitesse instantanée de M à l'instant t_0.

La vitesse moyenne entre deux instants t_0 et t_0+h $(h\neq 0)$ est égale à :

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{(t_0+h)-t_0}=\frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}=x'(t_0)$$

définition du nombre dérivé

7°) Exemple de calcul de vitesse instantanée

$x(t)=t^2+t-2$

Calculer la vitesse instantanée à l'instant 1.

$x'(t)=2t+1$
$x'(1)=3$

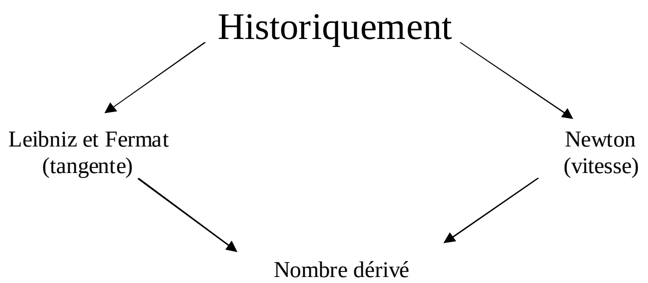
8°) Notation de Newton

$$\boxed{x'(t)=\dot{x}(t)\quad \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)}$$

9°) Le vecteur vitesse

$$\boxed{\vec{v}=\dot{x}(t)\vec{i}}$$

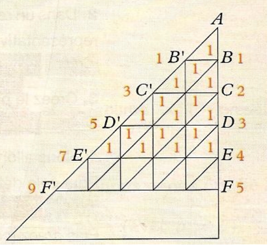
Les élèves verront en T^{ale} la notion de vitesse de réaction en chimie.



Appendice

La loi de la chute des corps (Galilée)

La notion de suite est utilisée par Galilée (Galileo Galilei, Pise, 1564 - 1642) lorsque, au tout début du XVIIe siècle, il essaya de trouver la loi du mouvement d'un corps en chute libre. Cette loi signale la naissance de la physique moderne.



Partant de dessins mathématiques plus anciens du XIV^{e} siècle, Galilée utilise une figure géométrique (*figure précédente*).

Sur une verticale descendante qui est l'échelle des temps, il dessine orthogonalement selon BB', CC', DD', etc., la vitesse du corps en chute libre à des intervalles de temps égaux, notés par les points A, B, C, D, qui correspondent à 1, 2, 3, ... unités de temps.

Il suppose que la vitesse est une fonction linéaire du temps, et donc que celle-ci soit représentée par une droite oblique à partir de l'origine.

L'aire du triangle ABB' donne la distance parcourue par le corps jusqu'au temps 1 ; l'aire du trapèze BCC'B' donne celle parcourue entre le temps 1 et le temps 2, etc. Nous disons aujourd'hui que l'aire triangulaire, comme fonction du temps $f(t)$, donne la distance parcourue.

Et si l'on appelle a l'aire ABB', il est évident, par les découpages géométriques de la figure, que les aires augmentent comme $3a$, $5a$, $7a$, etc., c'est-à-dire selon la progression des nombres entiers impairs.

C'est ce qui est vérifiable expérimentalement.

Or, si l'on écrit $f(t) = at^2$, on constate puisque $f(t+1) - f(t) = (2t+1)\,a$, et en faisant $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$, que cette fonction possède la même propriété de croissance selon les nombres entiers impairs.

Galilée en induit que c'est bien la fonction qui donne la loi de la chute des corps.

Galilée
(Pise, 1564 - Pise, 1642).

Approche historique

Approche historique

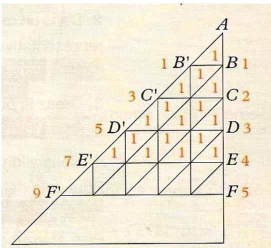
Un problème

Aujourd'hui, on lit directement sur le tableau de bord la vitesse en km/h d'une voiture. On n'est donc pas étonné que cette vitesse ne soit pas constante, mais varie dans le temps. On comprend aussi que la définition commune de la vitesse, comme quotient de la distance parcourue par le temps mis pour le parcourir, ne suffise pas à définir la vitesse affichée par le tableau de bord.
Comment obtenir mathématiquement cette vitesse instantanée ?

Des éléments de réflexion

Dès le début du XVII[e] siècle, l'étude physique de la chute des corps pesants, entreprise par Galilée (Pise, 1564 - Pise, 1642) a donné le premier exemple d'une vitesse, certes variable, mais dont on pouvait dire la forme de la variation.
C'est comme fonction que la vitesse fut d'abord appréhendée, avant d'être elle-même définie mathématiquement, à la fin du XVII[e] siècle, comme dérivée de la fonction $d(t)$ (distance parcourue jusqu'au temps t par le corps en chute libre).

Provenant de dessins mathématiques plus anciens du XIV[e] siècle, une figure géométrique utilisée par Galilée, fait comprendre en quoi a consisté la vérification de la loi de la chute des corps. Cette loi signale la naissance de la physique moderne.



Sur la figure, l'aire a du triangle ABB' donne $d(1)$; l'aire du trapèze BCC'B', $d(2) - d(1) = 3a$, etc.
On lit successivement à gauche les nombres entiers impairs. On voit que $d(t+1) - d(t) = (2t+1)a$, ce que l'on retrouve par le calcul avec $d(t) = at^2$.
Galilée en induit que lorsqu'un corps tombe en chute libre, sans vitesse initiale, la distance parcourue $d(t)$ est $d(t) = at^2$ et que sa vitesse instantanée est $v(t) = 2at$

Le triangle de Galilée fournit d'ailleurs une excellente introduction aux suites qui vont être étudiées bientôt (étude des distances parcourues pendant des intervalles de temps égaux).

Loi de la chute libre

Quel est l'intérêt de connaître une telle loi ?

On peut expérimentalement *mesurer* le temps de chute d'un objet lâchée d'une hauteur de 5 mètres, de 10 mètres etc.

L'intérêt d'une telle loi est de pouvoir *calculer* le temps de chute d'un objet lâchée d'une hauteur connue sans avoir à faire l'expérience.

Passage

mesurer $\longrightarrow$ calculer

Une autre question, qui n'est pas évidente à priori, est de savoir si la masse a une influence sur la durée de chute.
L'expérience montre que non : deux objets de masses différentes lâchés d'une même hauteur atteignent le sol au même instant (à condition, évidemment que l'on puisse négliger les frottements de l'air, ce qui ne serait pas le cas pour une plume par exemple).

D'après la loi de la chute libre, on voit que la masse n'intervient pas dans la formule de la distance parcourue. La masse n'a donc pas d'influence sur la durée de la chute.

Comment peut-on établir cette loi ?

Cette loi peut être établie simplement en utilisant la relation fondamentale de la dynamique qui sera étudiée en Terminale.
On utilise le fait que la seule force qui s'exerce sur l'objet est son poids.

La définition de la **vitesse moyenne** a été donnée dans sa forme moderne seulement au XVII[e] siècle par Varignon.

Durant toute la première partie du XVII[e] siècle, les mathématiciens français se sont beaucoup intéressés aux mouvements (notamment, Etienne Pascal, père de Blaise Pascal, qui était membre de *l'Academia Parisiensis*, dirigée par le Père Mersenne, avec les centres instantanés de rotation).

EXTRAIT DU SITE AROMATHS

PISTES EXPLICATIVES DE LA PROBLEMATIQUE
LES TRAVAUX DE GALILEE

Éléments historiques :
Galilée :
Physicien et astronome italien (Pise, Italie, 1564 - Arcetri, Italie, 1642). Au-delà de paroles légendaires sur la mobilité de la Terre (qu'il n'a vraisemblablement jamais prononcées), le personnage est avant tout l'un des artisans de la science moderne : c'est Galilée qui a introduit les mathématiques dans le monde de la physique, abandonnant ainsi définitivement les concepts qualitatifs aristotéliciens (Le VIIIe et le VIIe siècle av. J.-C.).
Leibniz :
Philosophe et mathématicien allemand (Leipzig, 1646 - Hanovre, 1716). Le philosophe mathématicien du Grand Siècle et de l'aube des Lumières a subordonné ses investigations à la recherche d'une science universelle dévoilant éléments et structure, raison et processus, variété et unité, harmonie et beauté. Ses découvertes concernant le calcul différentiel et intégral, sa machine à calculer, plus perfectionnée que celle de Pascal, révèlent sa pleine dimension de savant européen. Aussi rencontre -t -il Spinoza. .
Lagrange : né Giuseppe Luigi Lagrangia, puis Joseph-Louis, comte Lagrange.
Mathématicien et physicien français (Turin, royaume de Sardaigne-Piémont, 1736 - Paris, 1813). L'essentiel de ses travaux mathématiques se fit en analyse, même s'il tenta dans sa Théorie des fonctions analytiques (1797) de donner un fondement algébrique, et non infinitésimal, au calcul différentiel.
Infinitésimal : On désigne par calcul infinitésimal l'outil de calcul élaboré à partir du XVII^{e} siècle mettant en jeu des quantités «infiniment petites ». Ses principales applications sont le calcul différentiel (notion de vitesse, de tangente à une courbe, de dérivée...) et le calcul intégral (calcul de la longueur d'une courbe, de l'aire d'une surface, du volume d'un solide...).
La dérivée : On considère ici des fonctions réelles de la variable *x* appelées fonctions numériques. Étant donné deux nombres x_1 et x_2, leur quotient fournit des informations sur la fonction. La propriété remarquable et fondatrice du calcul différentiel est la suivante : pour certaines fonctions, le quotient admet une limite lorsque x_2 tend vers x_1. Les informations obtenues ne dépendent plus des deux nombres x_1 et x_2, mais du seul x_1 : le coefficient directeur de la tangente !

Petits compléments

.
Le triangle de Galilée pour les calculs de vitesse.

Accélération : dérivée de la vitesse instantanée

Mouvement uniforme : accélération nulle
Mouvement uniformément accéléré : accélération constante.

Calcul infinitésimal

Explication pour comprendre comment les dérivées « s'intègrent » dans les vitesses instantanées

Etude d'un exemple

$x(t)=5t^2$ (le 5 vient de la loi exacte de la chute libre avec $x(t)=\frac{1}{2}gt^2$ en prenant $g=10\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, la distance est exprimée en mètres, le temps *t* en secondes).

Comment définir la notion de vitesse instantanée à l'instant 2 secondes ?

On pourrait se référer à ce que l'on fait en physique lorsque l'enregistrement de la trajectoire d'un mobile.

Pour définir le vecteur vitesse à un instant *t*, on encadre cet instant par deux instants très proches.

On pourrait faire la même chose. Mais ce n'est pas ce que l'on retient en maths.

Je pourrais vous laisser chercher longtemps. Mais comme des mathématiciens et des physiciens ont déjà réfléchi au problème j'aime mieux donner la solution tout de suite plutôt que de vous laisser chercher (ce pourrait être cependant un thème d'étude et de recherche très intéressant, qui vous amènerait certainement à rencontrer les dérivées).

Pour définir la vitesse instantanée à un instant t_0, on prend un instant très « proche » $t_0+h\ (h\neq 0)$.

La vitesse moyenne entre les instants t_0 et $t_0+h\ (h\neq 0)$ est égale à :

$$\frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}=\frac{5(t_0+h)^2-5(t_0)^2}{h}=\frac{5(t_0{}^2+2t_0h+h^2)-5t_0{}^2}{h}=\frac{10t_0h+5h^2}{h}=10t_0+5h\xrightarrow[h\to 0]{}10t_0$$

On fait tendre *h* vers 0

Les *h* « s'évanouissent »

Le résultat de la limite est la vitesse instantanée à l'instant t_0.

En fait, nous venons de calculer le nombre dérivé en t_0.

$$\lim_{t\to 0}\frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}=x'(t_0)$$

$1^{\text{ère}}$ S **Exercices sur le chapitre 31**

1 Un point mobile M se déplace sur un axe Δ de repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}\right)$. Son abscisse à l'instant t est $x(t) = 2t^2 - 3t + 1$.

1°) Calculer la vitesse moyenne du mobile entre les instants 1 et 3.
2°) Déterminer à quels instants le mobile est en O.
3°) Déterminer la vitesse instantanée du mobile à l'instant 2.

2 Un point mobile M se déplace sur un axe Δ de repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}\right)$. A chaque instant $t \geq 0$, on repère sa position par son abscisse $x(t) = 6t - 3t^2$.

1°) Calculer la vitesse v_0 de ce mobile à l'instant $t = 0$.
2°) Décrire le mouvement du mobile sur l'axe Δ.
3°) Quelle est la vitesse du mobile quand il change de sens ?
3°) Quelle est la vitesse du mobile quand il repasse en O ?

3 On laisse tomber un objet du sommet d'une falaise à l'instant $t = 0$.
On estime qu'à chaque instant, l'altitude (en mètres) de l'objet est donnée par : $a(t) = 100 - 5t^2$.

1°) Quelle est la hauteur de la falaise ?
2°) Quelle est la vitesse de l'objet lorsqu'il atteint le sol ?

4 Un objet est lancé verticalement vers le haut à partir de l'instant $t = 0$.
Pendant la phase ascendante, la hauteur, en mètres, de cet objet à l'instant t est : $h(t) = 1 + 7t - 5t^2$.

1°) De quelle hauteur lance-t-on cet objet ?
2°) Déterminer sa vitesse en fonction de t.
3°) Quelle hauteur maximale atteint-il ?

5 Deux mobiles M et N se déplacent sur un axe rectiligne d'origine O et d'unité 1 m. La loi horaire (t en s) du point M est donnée par : $f(t) = 100 - 5t$ et celle du point N par : $g(t) = \dfrac{1}{2}t^2$.
Quelles sont les vitesses des deux mobiles lorsqu'ils se rencontrent ?

Réponses

1 1°) La vitesse moyenne du mobile entre les instants 1 et 3 est égale à 5 (on ne met pas d'unité car on est en mathématiques.

2°) 1 et $\dfrac{1}{2}$ 3°) 5

Mettre exercices sur la notion d'accroissement.