$1^{ère}$ S3 **Devoir pour le lundi 8 mars 2010**

Dans tous les exercices, le plan *P* est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

I. Information concernant l'intersection de deux cercles (ou leur position relative)

Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$' deux cercles de centres respectifs O et O' <u>distincts</u> et de rayons respectifs *R* et *R*'.

- si $|R-R'| < OO' < R+R'$, alors $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$' sont **sécants**.
- si $OO' = R+R'$, alors $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$' sont **tangents extérieurement**.
- si $OO' > R+R'$, alors $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$' sont **extérieurs**.
- si $OO' = |R-R'|$, alors $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$' sont **tangents intérieurement**.
- si $OO' < |R-R'|$, alors $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$' sont **intérieurs**.

Dans chaque cas, on donne deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}$' définis par une équation cartésienne.
Déterminer leurs centres respectifs Ω et Ω' et leurs rayons respectifs *r* et *r*' puis étudier leur position relative.
1°) $\mathcal{C}$: $x^2+y^2+4x+2y+2=0$ et $\mathcal{C}$' : $x^2+y^2-4x-4y-2=0$.
2°) $\mathcal{C}$: $x^2+y^2+2x-4y-13=0$ et $\mathcal{C}$' : $x^2+y^2-6x+4y+11=0$.
3°) $\mathcal{C}$: $x^2+y^2-6x-8y+24=0$ et $\mathcal{C}$' : $x^2+y^2+2x-2y-34=0$.
4°) $\mathcal{C}$: $x^2+y^2-16=0$ et $\mathcal{C}$' : $x^2+y^2-4x+3=0$.

Visualiser les résultats en se servant du logiciel *Geogebra*.
Pour tracer un cercle, il suffit de rentrer son équation dans saisie sous forme canonique (c'est-en tapant sous la forme « $(X-a)^\wedge 2+(Y-b)^\wedge 2=...$ »).

II. On donne les points $A(2\,;\,6)$, $B(3\,;-1)$ et $C(-1\,;\,-3)$.
On note $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit à ABC.
1°) Déterminer une équation cartésienne de chacune des droites Δ et Δ', médiatrices respectives de $[AB]$ et $[BC]$.
On rédigera très soigneusement dans chacun des deux cas.
2°) Calculer les coordonnées du point Ω centre du cercle $\mathcal{C}$.
3°) Déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.
Vérifier en utilisant le logiciel *Geogebra*.
Pour cela, placer les points A, B, C puis tracer le cercle circonscrit au triangle ABC grâce à la commande « Cercle passant par trois points ».

L'équation du cercle circonscrit s'affiche à gauche sous forme canonique.
Vérifier que cette équation est bien celle qui a été déterminée par le calcul.

4°) **Facultatif.** On se propose de retrouver une équation cartésienne de $\mathcal{C}$ par une tout autre méthode (qui peut surprendre à première vue).
On sait que $\mathcal{C}$ admet une équation cartésienne de la forme $x^2+y^2+ax+by+c=0$, *a*, *b*, *c* étant trois réels.
En écrivant que $\mathcal{C}$ passe par A, B, C, déterminer un système d'équations vérifié par *a*, *b*, *c* et écrire alors l'équation cartésienne que l'on obtient.

III. 1°) Déterminer une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(1\,;-2)$ et de rayon 2.
2°) A tout réel *m*, on associe la droite D_m d'équation cartésienne $y=mx$.
On s'intéresse aux points d'intersection éventuels de $\mathcal{C}$ et de D_m.
a) Démontrer que les abscisses des points d'intersection éventuels de $\mathcal{C}$ et de D_m sont solutions de l'équation $(m^2+1)x^2+2(2m-1)x+1=0$ (E).
b) Expliquer pourquoi (E) est une équation du second degré. Calculer le discriminant réduit Δ' de (E).
c) En déduire le nombre de points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de D_m suivant les valeurs de *m*.

On rédigera la discussion ainsi :
« Si $m \in]...\,;...[$, alors …. ».

d) Donner les valeurs de *m* pour lesquelles la droite D_m est tangente à $\mathcal{C}$. En déduire les équations des tangentes à $\mathcal{C}$ passant par le point O.
Réaliser la figure à l'aide du logiciel *Geogebra*.
Utiliser le bouton qui concerne les droites puis cliquer sur l'icône *Tangentes* qui permet de tracer les tangentes issues d'un point à un cercle.
Faire tracer les tangentes au cercle $\mathcal{C}$ qui passent par le point O.
Pour cela, cliquer sur le point O puis sur le cercle $\mathcal{C}$.
Les équations réduites des deux tangentes apparaissent sur la gauche.
Contrôler les résultats obtenus précédemment par le calcul.

IV. Exercice facultatif

On note $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y=\dfrac{1}{x}$.

On désigne par *a*, *b*, *c* trois réels non nuls, deux à deux distincts, puis par A, B, C les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives *a*, *b*, *c*.
Le point H est l'orthocentre du triangle ABC.
On appelle Γ le cercle circonscrit au triangle ABC et E son centre.
Le point D est le symétrique du point H par rapport à O.

Travail informatique sur *Geogebra*

1°) Réaliser la figure.
2°) Faire varier *a*, *b*, *c* et émettre des conjectures concernant les positions des points H et D.

Travail mathématique

1°) Déterminer les équations cartésiennes de deux hauteurs du triangle ABC.
2°) a) Calculer les coordonnées du point H en fonction de *a*, *b*, *c*.
b) Démontrer la conjecture faite sur le point H.
3°) a) Calculer les coordonnées du point D en fonction de *a*, *b*, *c*.
b) Démontrer la ou les conjectures faites sur le point D.

1$^{\text{ère}}$ S3 — Correction du devoir pour le 8 mars 2010

I.

1°) $\Omega(-2\,;-1)$ et $r=\sqrt{3}$; $\Omega'(2\,;2)$ et $r'=\sqrt{10}$; $\Omega\Omega'=5$; extérieurs

1°) $\Omega(-1\,;2)$ et $r=3\sqrt{2}$; $\Omega'(3\,;-2)$ et $r'=\sqrt{2}$; $\Omega\Omega'=2\sqrt{5}$; tangents extérieurement

1°) $\Omega(3\,;4)$ et $r=1$; $\Omega'(-1\,;1)$ et $r'=6$; $\Omega\Omega'=5$; tangents intérieurement

1°) $\Omega(0\,;0)$ et $r=4$; $\Omega'(2\,;0)$ et $r'=1$; $\Omega\Omega'=2$; intérieurs

---

II. Exercice à faire en rédigeant convenablement

1°) $\Delta : x-2y+15=0$
$\Delta' : 2x+y=0$

2°) $\Omega(-1\,;2)$; $R=\Omega\mathrm{A}=5$

3°) $x^2+y^2+2x-4y-20=0$

III. 1°) Une équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$ s'écrit $(x-1)^2+(y+2)^2=4$ soit $x^2+y^2-2x+4y+1=0$.

2°) a) Les abscisses des points d'intersection éventuels de $\mathcal{C}$ et de D_m sont solutions de l'équation
$x^2+(mx)^2-2x+4(mx)+1=0$.

Cette équation est équivalente à : $x^2+m^2x^2-2x+4mx+1=0$ soit $(m^2+1)x^2+2(2m-1)x+1=0$ (E).

b) L'équation (E) est du second degré car la coefficient de x^2 est égal à m^2+1 qui ne s'annule jamais.

Le discriminant réduit de (E) s'écrit :

$\Delta'=(2m-1)^2-(m^2+1)$

$\Delta'=3m^2-4m$

$\Delta'=3m(m-4)$

Le polynôme $m(3m-4)$ admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$: $m_1=0$ et $m_2=\dfrac{3}{4}$.

On applique la **règle du signe** d'un polynôme du second degré.

m	$-\infty$		0		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
Signe de Δ'		+	0	–	0	+	

On discute suivant les valeurs du paramètre *m*.

Discussion :

- Si $m\in\left]-\infty\,;0\right[\cup\left]\dfrac{3}{4}\,;+\infty\right[$, alors $\Delta'>0$.

  Dans ce cas, le polynôme admet deux racines distinctes dans $\mathbb{R}$; par suite, $\mathcal{C}$ et D_m se coupent en deux points distincts.

- Si $m\in\left]0\,;\dfrac{3}{4}\right[$, alors $\Delta'<0$.

  Dans ce cas, le polynôme n'admet aucune racine dans $\mathbb{R}$; par suite, $\mathcal{C}$ et D_m n'ont aucun point commun.

- Si $m=0$ ou $m=\dfrac{3}{4}$, alors $\Delta'=0$.

  Dans ce cas, le polynôme admet une racine double dans $\mathbb{R}$; par suite, $\mathcal{C}$ et D_m ont un point commun.

c) La droite D_m est tangente à $\mathcal{C}$ lorsqu'elle coupe $\mathcal{C}$ en un seul point c'est-à-dire lorsque l'équation (E) admet une solution unique.

D'après l'étude de la question b), on peut donc dire que la droite D_m est tangente à $\mathcal{C}$ lorsque $m\in\left\{0\,;\dfrac{3}{4}\right\}$.

Les tangentes à $\mathcal{C}$ passant par le point O sont donc les droites D_0 et $D_{\frac{3}{4}}$ d'équations respectives $y=0$ et $y=\dfrac{3}{4}x$.

IV.

Travail informatique sur *Geogebra*

2°) Conjectures concernant les positions des points H et D :

- Le point H semble appartenir à $\mathcal{C}$.
- Le point D semble appartenir à $\mathcal{C}$ et à Γ.

Travail mathématique

1°) La hauteur issue de A a pour équation : $y=bcx+\dfrac{1}{a}-abc$

La hauteur issue de B a pour équation : $y=acx+\dfrac{1}{b}-abc$

2°) a) En résolvant le système constitué par les deux équations, on trouve : $x_{\mathrm{H}}=-\dfrac{1}{abc}$; $y_{\mathrm{H}}=-abc$

b) On constate que $y_{\mathrm{H}}=\dfrac{1}{x_{\mathrm{H}}}$ donc H appartient à $\mathcal{C}$.

3°) a) On a : $x_{\mathrm{D}}=\dfrac{1}{abc}$ et $y_{\mathrm{D}}=abc$.

b) Le point O est centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}$ donc comme H est sur la courbe, son symétrique par rapport à O est sur la courbe donc D est sur la courbe $\mathcal{C}$.
N.B. : on constate que pour démontrer cette conjecture on n'a pas besoin d'utiliser les coordonnées de D.

La deuxième conjecture sur le point D, à savoir $\mathrm{D}\in\Gamma$, est plus longue et plus difficile à démontrer.