TS3

Devoir pour le lundi 8 février 2010

Dans les exercices I à IV, le plan complexe *P* est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

I. On note f l'application du plan P dans lui-même qui à tout point M, d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = \mathrm{i}z^2 + z$.

L'affixe de l'image M' du point M par f est donc donnée par $z_{\mathrm{M'}} = \mathrm{i}\left(z_{\mathrm{M}}\right)^2 + z_{\mathrm{M}}$ (attention alors à la place du prime !).

1°) a) Déterminer le point O' associé au point O, le point A' associé au point A d'affixe 1 et le point B' associé au point B d'affixe -1.
Faire une figure en prenant 2 centimètres pour unité graphique. Mettre les pointillés et les valeurs des coordonnées des différents points sur les axes.
b) L'application f conserve-t-elle l'alignement ?

2°) Etant donné un nombre complexe z, on pose $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$, avec x, y, x', y' réels.
a) Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
On effectuera une suite de calculs pour z' ; il n'y a donc pas besoin de symboles d'équivalence.
b) Déterminer l'ensemble E des points M du plan tels que z' soit imaginaire pur.

3°) a) Soit M un point quelconque de l'axe des abscisses. Démontrer que son image M'appartient à la parabole Γ d'équation $y = x^2$.
b) Expliquer pourquoi l'image de l'axe des abscisses par f (c'est-à-dire l'ensemble des images des points M' lorsque M décrit l'axe des abscisses) est la parabole Γ.

II. Soit c un nombre complexe fixé ; on pose $c = a + \mathrm{i}b$ avec a et b réels.
Déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe z du plan P tels que $z\,\bar{z} - z\,\bar{c} - \bar{z}\,c = 0$.

III. On note f l'application du plan P dans lui-même qui à tout point M, d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = z^2 + 1$.

Déterminer les points invariants par f.

On rédigera ainsi la recherche : « M est invariant par f si et seulement si $\mathrm{M'} = \mathrm{M}$ » sous la forme d'une chaîne d'équivalences et l'on conclura ainsi : « Les points invariants par f sont les points A et B d'affixes respectives ».

IV. On note A le point d'affixe 1 et on pose $P^* = P \setminus \{\mathrm{A}\}$.
On note f l'application du plan P^* dans P qui à tout point M, d'affixe $z \neq 1$, associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{1+z}{1-z}$.

Déterminer les points invariants par f.

V. On considère le polynôme $P(z) = z^3 - (4+\mathrm{i})z^2 + (13+4\mathrm{i})\,z - 13\mathrm{i}$.
1°) Démontrer que i est une racine du polynôme.

Dans la suite de l'exercice, on se propose de déterminer toutes les racines du polynôme dans $\mathbb{C}$.

2°) Déterminer par une méthode au choix les nombres complexes a, b et c tels que, pour tout nombre complexe z on ait : $P(z) = (z - \mathrm{i})(az^2 + bz + c)$.

3°) En déduire toutes les racines du polynôme dans $\mathbb{C}$.

VI. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2(1 - \ln x)$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1°) Etudier la continuité de f à droite en 0.

2°) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 0 (on étudiera $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$).
Que peut-on dire de la courbe $\mathcal{C}$ au point O ?
3°) Justifier avec soin la dérivabilité de f sur $]0\,;+\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour $x > 0$.

Définir alors clairement la fonction f' :
f' est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $f'(x) =$ ..... si $x > 0$ et $f'(0) =$ .....

Dresser le tableau de variation de f avec les limites (flèches à la règle) et la valeur exacte de l'extremum.

VII. On considère les suites (a_n) et (b_n) définies sur $\mathbb{N}$ par : $a_0 = 20$, $b_0 = 60$ et, pour tout entier naturel n,
$a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{4}$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n + 2b_n}{4}$.
1°) En utilisant un tableur, calculer les 50 premiers termes des suites (a_n) et (b_n).
2°) Peut-on penser que ces suites sont convergentes et quelle conjecture peut-on formuler quant à leurs limites ?
3°) Soit (u_n) et (v_n) les suites définies, pour tout entier naturel n, par : $u_n = a_n + b_n$ et $v_n = b_n - a_n$.
a) Compléter la feuille de calculs avec les 25 premiers termes des suites (u_n) et (v_n).
b) Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature de chacune de ces suites ?
c) Vérifier expérimentalement, sur la feuille de calcul, la conjecture émise.
4°) a) Démontrer la conjecture de la question 3°) b).
b) Déterminer les expressions de a_n et b_n en fonction de n.
c) Justifier les réponses données à la question 2° et déterminer la limite des suites (a_n) et (b_n).

VIII. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n+k}$ et $V_n = \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{1}{n+k}$.

Travail sur tableur

On souhaite calculer les valeurs de U_n et V_n pour $n = 10$ à l'aide d'un tableur.

On va réaliser une feuille de calcul sur le modèle ci-dessous :

	A	**B**	**C**	
1		n =	10	
2	k			
3	0			
4	1			
5	2			

1°) Préparer la feuille de calcul en respectant le modèle donné.

2°) Remplir la première colonne de A3 à A13 avec les entiers de 0 à 10.
On rentrera 0 dans la cellule A3 et on utilisera un formule qui permettent de remplir toute la colonne en la recopiant cette formule vers le bas.

3°) Ecrire dans la cellule B4 la formule =1/(C$1+A4), puis dans la cellule B5 la formule =B4+1/(C$1+A5).
Recopier cette dernière formule jusqu'à la ligne 13.

On notera que les $ servent à garder le nombre contenu dans la cellule concernée lorsque l'on recopie la formule vers le bas.

4°) Ecrire dans la cellule C3 la formule =1/(C$1+A3), puis dans la cellule C4 la formule =B4+1/(C$1+A4).
Recopier cette dernière formule jusqu'à la ligne 13.

Application

On admet que les suites (U_n) et (V_n) convergent toutes les deux vers ln 2 et que, de plus, U_n et V_n sont des valeurs approchées respectivement par défaut et par excès de ln 2.

A l'aide des résultats obtenus à l'aide du tableur, donner un encadrement de ln 2.

Vérifier à l'aide de la valeur de ln 2 donnée par une calculatrice.

IX. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose : $S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$ (ou $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$).

On a démontré que $\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.

On souhaite calculer les termes de la suite (S_n) sur tableur.

1ère méthode :

Colonne A

Remplir la première colonne de A1 à A1000 avec les entiers de 1 à 1000.

Colonne B

Dans la cellule B1, écrire la formule =1/A1 et dans la cellule B2, la formule =B1+1/A2 dans la cellule B2.
Recopier cette formule vers le bas jusqu'à la ligne 1000.

2e méthode :

Colonne A

Remplir la première colonne de A1 à A1000 avec les entiers de 1 à 1000.

Colonne B

Dans la cellule B1, écrire la formule = SOMME(A1: A1) ; recopier cette formule vers le bas jusqu'à la ligne 1000.

TS3

Correction du devoir pour le lundi 8 février 2010

I. 1°) a) $z_{O'} = \mathrm{i}z_O + z_O = \mathrm{i}\times 0 + 0 = 0$

Le point O' a pour affixe 0 ; il est donc confondu avec O.

$z_{A'} = 1+\mathrm{i}$

Le point A' a pour affixe 1+i.

$z_{B'} = -1+\mathrm{i}$

Le point B' a pour affixe –1+i.

b) Les points O, A, B sont alignés (car ils appartiennent tous à l'axe des abscisses) mais leurs images O', A', B' ne sont pas alignées.
On en déduit que l'application f ne conserve pas l'alignement.

2°) a) $z' = \mathrm{i}z^2 + z = \mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)^2 + x + \mathrm{i}y = ... = x - 2xy + \mathrm{i}(x^2 - y^2 + y)$

On en déduit que :

$x' = x - 2xy$

$y' = x^2 - y^2 + y$

b) $\mathrm{M}(z) \in E \Leftrightarrow z' \in \mathrm{i}\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x' = 0$

$\Leftrightarrow x - 2xy = 0$

$\Leftrightarrow y(1-2x) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \text{ou} \\ 1-2x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

L'ensemble E est la réunion de la droite (Oy) et de la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$.

3°) a) M est un point quelconque de l'axe des abscisses donc M a pour coordonnées (x ; 0) avec $x \in \mathbb{R}$.
On en déduit que son image M' par f a pour coordonnées $x' = x$ et $y' = x^2$.
Par conséquent, $y' = x'^2$.
On peut donc dire que M'appartient à la parabole Γ d'équation $y = x^2$.

b) Lorsque M décrit l'axe des abscisses, x décrit $\mathbb{R}$ et par suite, x' décrit aussi $\mathbb{R}$.

Le point M' décrit donc la parabole Γ.

II. $c = a + \mathrm{i}b$ avec a et b réels.
Déterminons l'ensemble Γ des points M d'affixe z du plan P tels que $z\,\bar{z} - z\,\bar{c} - \bar{z}\,c = 0$.

On pose $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels.

$\mathrm{M} \in \Gamma$ si et seulement si $z\,\bar{z} - z\,\bar{c} - \bar{z}\,c = 0$

si et seulement si $(x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y) - (x+\mathrm{i}y)(a-\mathrm{i}b) - (x+\mathrm{i}y)(a-\mathrm{i}b) = 0$

si et seulement si $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$

si et seulement si $x^2 - 2ax + y^2 - 2by = 0$

si et seulement si $(x-a)^2 - a^2 + (y-b)^2 - b^2 = 0$

si et seulement si $(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2$

Γ est donc le cercle de centre $\Omega(a\,;b)$ et de rayon $\sqrt{a^2+b^2}$.

N.B. : Ce cercle passe par l'origine O du repère (grâce à l'équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$).

III. M est invariant par f si et seulement si $\mathrm{M}' = \mathrm{M}$

si et seulement si $z' = z$

si et seulement si $z^2 + 1 = z$

si et seulement si $z^2 - z + 1 = 0$

Considérons le polynôme $z^2 - z + 1$.

Calcul du discriminant

$\Delta = -3$

On a : $\Delta < 0$ donc le polynôme admet 2 racines complexes distinctes conjuguées :

$z_1 = \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $z_2 = \dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$

Conclusion : Les points invariants par f sont les points A et B d'affixes respectives $\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

IV. M est invariant par f si et seulement si $\mathrm{M}' = \mathrm{M}$

si et seulement si $z' = z$

si et seulement si $\dfrac{1+z}{1-z} = z$

si et seulement si $1 + z = z(1-z)$

si et seulement si $1 + \cancel{z} = \cancel{z} - z^2$

si et seulement si $z^2 = -1$

si et seulement si $z = \mathrm{i}$ ou $z = -\mathrm{i}$

Conclusion : Les points invariants par f sont les points A et B d'affixes respectives i et –i.

V. $P(z) = z^3 - (4+\mathrm{i})z^2 + (13+4\mathrm{i})\,z - 13\mathrm{i}$.

1°) On calcule $P(\mathrm{i}) = ... = 0$

On en déduit que i est une racine du polynôme.

2°) $P(z) = (z-\mathrm{i})(z^2 - 4z + 13)$

3°) Les racines du polynôme dans $\mathbb{C}$ sont i, 2+3i et 2–3i.

VI.

1°) $\forall x > 0 \;\; f(x) = x^2(1-\ln x) = x^2 - x \times x\ln x$

On sait que $\lim\limits_{x\to 0+}(x\ln x) = 0$ (limite de référence) donc $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 0$.

Or $f(0) = 0$. On en déduit donc que f est continue à droite en 0.

3°) $\forall x > 0 \;\; \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{x^2(1-\ln x)}{x} = x(1-\ln x) = x - x\ln x$

On utilise à nouveau $\lim\limits_{x\to 0+}(x\ln x) = 0$ (limite de référence).

On a donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = 0$.

On en déduit que *f* est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$.

On peut donc dire que la courbe **C** admet une demi-tangente horizontale au point O.

4°) Les fonctions $u : x \mapsto x^2$ et $v : x \mapsto 1-\ln x$ sont dérivables sur]0 ; +∞[donc la fonction *f* est dérivable sur]0 ; +∞[d'après la règle sur les produits de fonctions dérivables.

$$\forall x > 0 \;\; f'(x) = 2x(1-\ln x) + x^2 \times \left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = 2x(1-\ln x) - x$$

$$f'(x) = x(1-2\ln x)$$

f ' est la fonction définie sur l'intervalle [0 ; +∞[par : $f'(x) = x(1-2\ln x)$ et $f'(0) = 0$.

Pour connaître le signe de $f'(x)$ sur]0 ; +∞[, on étudie le signe de $1-2\ln x > 0$.

Pour cela, on résout deux inéquations et une équation dans l'intervalle]0 ; +∞[.

$1-2\ln x > 0$	$1-2\ln x < 0$	$1-2\ln x = 0$
$\ln x < \frac{1}{2}$ $\ln x < \ln\sqrt{\mathrm{e}}$ $x < \sqrt{\mathrm{e}}$	$\ln x > \frac{1}{2}$ $\ln x > \ln\sqrt{\mathrm{e}}$ $x > \sqrt{\mathrm{e}}$	$\ln x = \frac{1}{2}$ $\ln x = \ln\sqrt{\mathrm{e}}$ $x = \sqrt{\mathrm{e}}$

x	0		$\sqrt{\mathrm{e}}$		$+\infty$
SGN de $f'(x)$	0	+	0	–	
Variations de *f*	0	↗	$\frac{\mathrm{e}}{2}$	↘	$-\infty$

$$f(\sqrt{\mathrm{e}}) = \mathrm{e}(1-\ln\sqrt{\mathrm{e}}) = \mathrm{e}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{\mathrm{e}}{2}$$

VII. 1°) On réalise une feuille de calcul sur le modèle ci-dessous.

	A	**B**	**C**
1	n	a_n	b_n
2	0	20	60
3	1		
4	2		
5	3		

Dans la cellule B3, écrire la formule =(2B2+C2)/4 .

Dans la cellule C3, écrire la formule =(B2+2C2)/4.

2°) On peut penser que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers 0.

3°) a) b) On peut penser que les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques. c)

4°) a) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{4} + \dfrac{a_n + 2b_n}{4} = \dfrac{3a_n + 3b_n}{4} = \dfrac{3}{4}(a_n + b_n) = \dfrac{3}{4}u_n$.

On en déduit que la suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; u_n = u_0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 80 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{4} - \frac{2a_n + b_n}{4} = \frac{b_n - a_n}{4} = \frac{1}{4}(b_n - a_n) = \frac{1}{4}v_n.$$

On en déduit que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = 40 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Les conjectures de la question 3°) b) sont bien démontrées.

b)

$\left.\begin{array}{l} u_n = a_n + b_n \\ v_n = b_n - a_n \end{array}\right\}$ donc par addition membre à membre et soustraction membre à membre on obtient :

$a_n = \dfrac{u_n - v_n}{2}$ et $b_n = \dfrac{u_n + v_n}{2}$.

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{3}{4} < 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{1}{4} < 1$.

On peut donc dire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ d'où

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = 0 \text{ et } \lim_{n \to +\infty} b_n = 0}$$

VIII. En utilisant le tableur, on obtient l'encadrement suivant : 0,6687714 < ln 2 < 0,7187714

Or la calculatrice fournit : ln 2 = 0,6931471806…