1$^{\text{ère}}$ S3

Interrogation écrite du vendredi 5 février 2010 (40 minutes)

Prénom et nom : ……………………………………………………

Note : ……/20

I. (2 points) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\left\|\vec{u}\right\| = 3$, $\left\|\vec{v}\right\| = 2$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$.

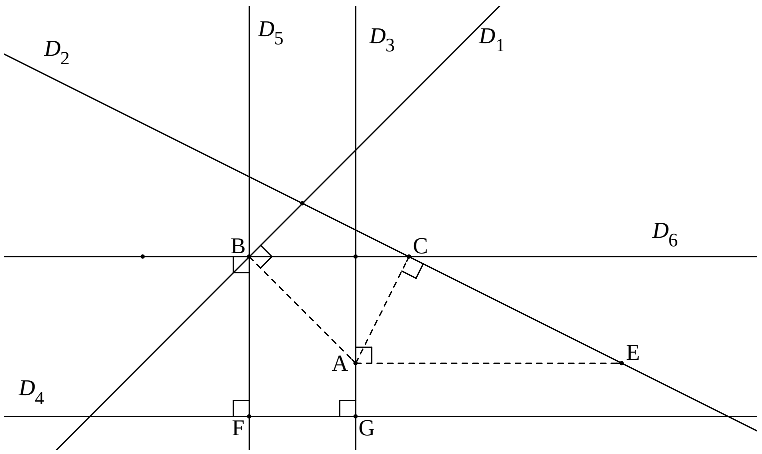
$\left(3\vec{u} - 2\vec{v}\right)^2 =$ ……………………	$\left(4\vec{u} - 3\vec{v}\right) \cdot \left(\vec{u} + 2\vec{v}\right) =$ ……………………

II. (2 points) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{3}$, $\left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{6}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$.

Déterminer la mesure en radians de l'angle géométrique $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$.

La mesure en radians de l'angle géométrique $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$ est égale à ………………

III. (2 points) On considère la figure codée donnée ci-dessous.



Compléter sans justifier les phrases suivantes :

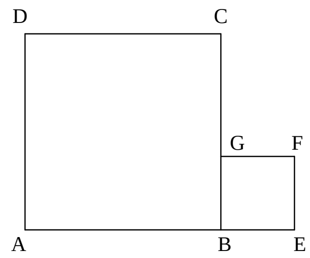
1°) Le projeté orthogonal de A sur la droite D_1 est le point ……………..

2°) Le projeté orthogonal de F sur la droite D_6 est le point ……………..

3°) Le projeté orthogonal de C sur la droite D_5 est le point ……………..

4°) Le projeté orthogonal de E sur la droite D_3 est le point ……………..

IV. (4 points) On considère la figure ci-contre où ABCD est un carré de côté a et BEFG est un carré de côté b, a et b étant deux réels strictement positifs.



Démontrer que les droites (AG) et (CE) sont perpendiculaires.

Bonus : retrouver ce résultat géométriquement en regardant le rôle joué par le point G dans le triangle AEC.

V. (6 points) On justifiera précisément le raisonnement dans chaque cas.

1°) On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x^2-1}{(x+1)^2}$. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

....

....

....

....

2°) On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{2\sqrt{x}}{1-x}$. Déterminer $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x)$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3°) On considère la fonction $h : x \mapsto 2+x-\dfrac{x^2}{3}$. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$.

....

....

....

....

VI. (2 points) Soit *f* une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. On suppose que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$.

Donner les asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$ représentative de *f* dans le plan muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

Faire deux phrases bien rédigées sans aucune abréviation.

....

....

....

....

VII. (2 points) Compléter les phrases ci-dessous.

1°) Soit *f* et *g* deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

Compléter : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$ ....

2°) Soit *f* et *g* deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Compléter : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) g(x) \right] =$ ....

1$^{\text{ère}}$ S3

Corrigé de l'interrogation écrite du 5 février 2010

I.

$\left(3\vec{u}-2\vec{v}\right)^2=133$ (on développe avec l'identité remarquable scalaire) $\left(3\vec{u}-2\vec{v}\right)^2=9\vec{u}^2-12\,\vec{u}\bullet\vec{v}+4\vec{v}^2=133$	$\left(4\vec{u}-3\vec{v}\right)\bullet\left(\vec{u}+2\vec{v}\right)=-3$ (on développe avec la bilinéarité du produit scalaire) $\left(4\vec{u}-3\vec{v}\right)\bullet\left(\vec{u}+2\vec{v}\right)=4\vec{u}^2+5\,\vec{u}\bullet\vec{v}-6\vec{v}^2=36-15-24=-3$

II. La mesure en radians de l'angle géométrique $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$ est égale à $\frac{3\pi}{4}$.

$$\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\frac{\vec{u}\bullet\vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|}=\frac{-3}{\sqrt{3}\times\sqrt{6}}=-\frac{3}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{2}}=-\frac{3}{3\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

La mesure en radians de l'angle géométrique $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$ est comprise entre 0 et π donc elle est égale à égale à $\frac{3\pi}{4}$.

III.

1°) Le projeté orthogonal de A sur la droite D_1 est le point B.

2°) Le projeté orthogonal de F sur la droite D_6 est le point B.

3°) Le projeté orthogonal de C sur la droite D_5 est le point B.

4°) Le projeté orthogonal de E sur la droite D_3 est le point A.

III. Démontrons que (AG) ⊥ (CE).

Méthode : on utilise le produit scalaire et les décompositions de vecteurs.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{CE}&=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}\right)\cdot\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BE}\right)\\&=\underbrace{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{CB}}_{0}+\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BG}\bullet\overrightarrow{CB}+\underbrace{\overrightarrow{BG}\bullet\overrightarrow{BE}}_{0}\\&=\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BG}\bullet\overrightarrow{CB}\end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont colinéaires et de même sens.
Les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires et de sens contraires.

Par conséquent, $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{CE}=a\times b-a\times b$
$=0$

On en déduit que (AG) ⊥ (CE).

Bonus :

On a : (CB) ⊥ (AE) donc la droite (CB) est la hauteur issue de C dans le triangle ACE.

On a : $\widehat{BAC}=\widehat{EBF}=45^\circ$ (grâce aux propriétés des diagonales d'un carré) donc d'après la propriété des angles alterne-internes, (AC) // (BF).
Or (EG) ⊥ (BF) donc (GE) ⊥ (AC).
On en déduit que (GE) est la hauteur issue de E dans le triangle ACE.

G est donc le point d'intersection de deux hauteurs dans le triangle ACE. Par conséquent, G est l'orthocentre du triangle ACE.
On en déduit que G appartient à la hauteur issue de A donc (AG) ⊥ (CE).

IV.

°) $f:x\mapsto\frac{3x^2-1}{(x+1)^2}$

$\boldsymbol{D}_f=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$

f est une fonction rationnelle non nulle.

$\forall x\in\boldsymbol{D}_f\quad f(x)=\frac{3x^2-1}{x^2+2x+1}$

Donc d'après la règle des monômes de plus haut degré,

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}(3)=3$$

2°) $g:x\mapsto\frac{2\sqrt{x}}{1-x}$

$\boldsymbol{D}_g=[0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$

Attention g n'est pas une fonction rationnelle (à cause de la présence de la racine carrée au numérateur).

$\lim\limits_{x\to1}2\sqrt{x}=2$
$\lim\limits_{x\to1}(1-x)=0$

Tableau de signes du dénominateur

On fait le tableau de signes de $1-x$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $x-1$		$+$	$\rightarrow 0 \leftarrow$	$-$	
			$x<1$ $\quad$ $x>1$		
			1^- $\quad$ 1^+		

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^+} 2\sqrt{x}=2\\ \lim\limits_{x\to 1^+}(1-x)=0^-\end{array}\right\}\text{donc par limite d'un quotient } \lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=-\infty.$$

3°) $h : x \mapsto 2+x-\dfrac{x^2}{3}$

$\boldsymbol{D}_h=\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -\infty}(2+x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -\infty}\left(-\dfrac{x^2}{3}\right)=-\infty\end{array}\right\}\text{donc par limite d'une somme } \lim\limits_{x\to -\infty} h(x)=-\infty.$$

N.B. : On peut aussi utilise la règle des monômes de plus haut degré puisque *h* est une fonction polynôme.

VI.

- La courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ d'équation $x=2$ pour **asymptote verticale**.

- La courbe $\mathcal{C}$ admet la droite Δ' d'équation $y=-2$ pour **asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$**.

Un échantillon de phrases que j'ai trouvée :

La fonction $f(x)$ admet une asymptote verticale d'équation $x=2$.
La fonction $f(x)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y=-2$.

Autre version fausse (charabia)

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2$: asymptote horizontale en $+\infty$.
- Lorsque *x* tend vers – infini, la fonction *f* admet une asymptote à $y=-2$ en $-\infty$.
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$: asymptote verticale
- Lorsque *x* est supérieur à 2, la fonction *f* admet une asymptote verticale en $x > 2$.

Version fausse (à plusieurs titres)

$f(x)$ a pour asymptote horizontale la droite d'équation réduite $x=-2$ lorsque $f(x)$ tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
$f(x)$ a pour asymptote verticale en $-\infty$ et $+\infty$ la droite d'équation réduite $y=2$.

Version fausse (confusion entre la fonction et sa courbe)

La courbe *f* admet la droite …………..

La fonction f admet une asymptote horizontale d'équation $y=2$.

Assez grave : confusion asymptote – tangente

La courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale aux points de coordonnées $y=-2$.

La courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale aux points de coordonnées $y=-2$ en $+\infty$ et $-\infty$.
La courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote verticale aux points d'abscisses $x=2$

Confusion entre la courbe et son asymptote

La courbe $\mathcal{C}$ d' équation $y=-2$ admet des asymptotes horizontales en $+\infty$ et $-\infty$.
La courbe $\mathcal{C}$ d'équation réduite $x=2$ admet une asymptote verticale.

VII.

1°) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

2°) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)g(x)\right]=-\infty$$