TS

Exercices sur les équations différentielles (3)

$\boxed{1}$ Résoudre les équations différentielles :
$y'=2y+3$ (1) ; $4y'=2y-5$ (2) ; $3y'=y+6$ (3).

$\boxed{2}$ On considère l'équation différentielle $4y'-5y=2$ (E).
1°) Résoudre l'équation différentielle (E).
2°) Déterminer la solution *f* de (E) telle que $f(0)=-2$.

$\boxed{3}$ Une citerne calorifugée est chauffée par une résistance. La température est une fonction $\theta : t \mapsto \theta(t)$ qui vérifie l'équation différentielle $\theta' = a - b\theta$ (E) avec $a = 2{,}088\times10^{-2}$ et $b = 2{,}32\times10^{-4}$; *t* est exprimé en secondes et $\theta(t)$ en degrés Celsius.
1°) Résoudre l'équation différentielle (E).
2°) Donner l'expression de $\theta(t)$ sachant que $\theta(0)=20$.
3°) Déterminer une approximation de l'instant pour lequel la température atteint 40 ° C.

Dans les exercices suivants, on va chercher à résoudre d'autres équations différentielles que celles qui ont été étudiées dans le cours.
Pour cela, on va faire un changement de fonction inconnue qui permette de se ramener à une équation que l'on sait résoudre.

$\boxed{4}$ Le but de l'exercice est de déterminer la fonction *f* définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui satisfait aux conditions :

$$(\mathrm{E})\begin{cases}\text{pour tout réel } x \quad f'(x) = f(x) - \left[f(x)\right]^2 \\ f(0)=\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

1°) On admet que pour tout réel *x*, on a : $f(x)>0$.
On considère la fonction *g* définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.
a) Calculer $g'(x)$.
b) Démontrer que la fonction *g* vérifie les conditions : $(\mathrm{F})\begin{cases}\text{pour tout réel } x \quad g'(x)=1-g(x) \\ g(0)=2\end{cases}$.
2°) Résoudre l'équation différentielle $z'=1-z$. En déduire l'expression de *g* puis celle de *f*.

$\boxed{5}$ On considère l'équation différentielle $y'-y=3\mathrm{e}^{-2x}$ (E_1) ainsi que l'équation différentielle $y'-3y=3$ (E_2).
1°) Soit *u* une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et *v* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $v(x)=u(x)\mathrm{e}^{2x}$.
a) Calculer $v'(x)$ puis $v'(x)-3v(x)$.
b) Démontrer que *u* est solution de (E_1) si et seulement si *v* est solution de (E_2).
2°) Résoudre l'équation différentielle (E_2) ; en déduire les solutions de (E_1).

Réponses

$\boxed{1}$ (1) $f(x)=k\mathrm{e}^{2x}-\dfrac{3}{2}$ $(k\in\mathbb{R})$; (2) $f(x)=k\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+\dfrac{5}{2}$ $(k\in\mathbb{R})$; (3) $f(x)=k\mathrm{e}^{\frac{x}{3}}-6$ $(k\in\mathbb{R})$
Attention, il est important de dire à chaque fois que $k\in\mathbb{R}$.

$\boxed{2}$ 1°) $f(x)=k\mathrm{e}^{\frac{5x}{4}}-\dfrac{2}{5}$ $(k\in\mathbb{R})$; 2°) La solution de l'équation différentielle vérifiant la condition donnée est la fonction *f* définie par $f(x)=-\dfrac{8}{5}\mathrm{e}^{\frac{5x}{4}}-\dfrac{2}{5}$.

$\boxed{3}$ 1°) Pas de rédaction.
Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions θ définies sur $\mathbb{R}$ par $\theta(t)=k\mathrm{e}^{-bt}+\dfrac{a}{b}$ $(k\in\mathbb{R})$.
Dans cette question, il est inutile de remplacer *a* et *b* par les valeurs.

2°) $\theta(t)=90-70\,\mathrm{e}^{-bt}$ 3°) $t=-\dfrac{\ln\left(\frac{5}{7}\right)}{b}\approx 1450\text{ s}\approx 24\text{ min}.$

Dans les exercices suivants, en passant par une équation différentielle annexe, on trouve les solutions de l'équation différentielle mère sachant que l'on n'aurait pas pu déterminer les solutions de l'équation différentielle.
Comme pour les suites (étude d'une suite par une autre).

$\boxed{4}$ 1°) a) $g'(x)=-\dfrac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}$

2°) Les solutions de l'équation différentielle $z'=1-z$ sont les fonctions φ définies sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x)=k\mathrm{e}^{-x}+1$.

$g(x)=1+\mathrm{e}^{-x}$; $f(x)=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

Attention, on ne peut pas simplifier l'expression de *f* de la manière suivante : $f(x)=\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}}=1+\mathrm{e}^{x}$.

$\dfrac{1}{a+b}\neq\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$

(confusion avec la règle : $\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}$)

Il s'agit d'une **équation logistique** ou **de Verhulst**. C'est un cas particulier d'équation de Bernoulli.

$\boxed{5}$ 1°) a) $\forall x\in\mathbb{R}$ $v'(x)=\left[u'(x)+2u(x)\right]\mathrm{e}^{2x}$ $v'(x)-3v(x)=\left[u'(x)-u(x)\right]\mathrm{e}^{2x}$
2°) Les solutions de l'équation différentielle (E_2) sont les fonctions : $x\mapsto -1+k\mathrm{e}^{3x}$ $(k\in\mathbb{R})$.
Les solutions de l'équation différentielle (E_1) sont les fonctions : $x\mapsto -\mathrm{e}^{-2x}+k\mathrm{e}^{x}$ $(k\in\mathbb{R})$.

Solutions détaillées

$\boxed{1}$ Résolutions d'équations différentielles de la forme $y'=ay+b$

• $y'=2y+3$ (1)

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y'=ay+b$ avec $a=2$ et $b=3$.

Les solutions de (1) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ke^{2x}-\dfrac{3}{2}$ $(k\in\mathbb{R})$.

Il est important de dire que $(k\in\mathbb{R})$.

• $4y'=2y-5$ (2)

$(2) \Leftrightarrow y'=\dfrac{1}{2}y-\dfrac{5}{4}$ $(2')$

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y'=ay+b$ avec $a=\dfrac{1}{2}$ et $b=-\dfrac{5}{4}$.

Les solutions de (2) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ke^{\frac{x}{2}}+\dfrac{5}{2}$ $(k\in\mathbb{R})$.

• $3y'=y+6$ (3)

$(3) \Leftrightarrow y'=\dfrac{1}{3}y+2$ $(3')$

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y'=ay+b$ avec $a=\dfrac{1}{3}$ et $b=2$.

Les solutions de (3) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ke^{\frac{x}{3}}-6$ $(k\in\mathbb{R})$.

$\boxed{2}$ Résolution d'une équation différentielle de la forme $y'=ay+b$ et recherche d'une solution particulière

$4y'-5y=2$ (E)

1°) $(\text{E}) \Leftrightarrow y'=\dfrac{5}{4}y+\dfrac{1}{2}$ (E')

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y'=ay+b$ avec $a=\dfrac{5}{4}$ et $b=\dfrac{1}{2}$.

Les solutions de (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ke^{\frac{5x}{4}}-\dfrac{2}{5}$ $(k\in\mathbb{R})$.

2°) Déterminons la solution f de (E) telle que $f(0)=-2$.

On cherche le réel k tel que $f(0)=-2$ (1).

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow ke^{\frac{5\times 0}{4}}-\frac{2}{5}=-2\\ &\Leftrightarrow k\times 1-\frac{2}{5}=-2\\ &\Leftrightarrow k=-\frac{8}{5}\end{aligned}$$

La solution de (E) vérifiant la condition donnée est la fonction f définie par $f(x)=-\dfrac{8}{5}e^{\frac{5x}{4}}-\dfrac{2}{5}$.

$\boxed{3}$ Équation différentielle de la forme $y'=ay+b$ dans une situation concrète

1°)

$\theta'=a-b\theta$

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y'=\text{A}y+\text{B}$ avec $\text{A}=-b$ et $\text{B}=a$.

D'après le cours, les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions θ définies sur $\mathbb{R}$ par

$\theta(t)=ke^{-bt}+\dfrac{a}{b}$ $(k\in\mathbb{R})$.

2°) On cherche le réel k tel que $\theta(0)=20$ (1).

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow ke^{-b\times 0}+\frac{a}{b}=20\\ &\Leftrightarrow ke^{0}+\frac{2{,}088\times 10^{-2}}{2{,}32\times 10^{-4}}=20\\ &\Leftrightarrow k+\frac{2{,}088}{2{,}32}\times 10^{2}=20\\ &\Leftrightarrow k+90=20\\ &\Leftrightarrow k=-70\end{aligned}$$

On en déduit que $\theta(t)=90-70\,e^{-bt}$.

3°) On résout l'équation $\theta(t)=40$ (2).

(on n'écrit pas 40°, on ne met pas l'unité)

$(2) \Leftrightarrow 90-70\,\mathrm{e}^{-bt}=40$

$\Leftrightarrow -70\,\mathrm{e}^{-bt}=-50$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-bt}=\dfrac{5}{7}$

$\Leftrightarrow -bt=\ln\dfrac{5}{7}$

$\Leftrightarrow t=-\dfrac{\ln\frac{5}{7}}{b}$

$\Leftrightarrow t=-\dfrac{\ln\frac{5}{7}}{2{,}32\times10^{-4}}$

D'après la calculatrice, on a : $-\dfrac{\ln\frac{5}{7}}{2{,}32\times10^{-4}}=1450{,}31136...$

La température atteint 40 ° C au bout d'un temps environ égal à 1450 secondes soit 24 minutes.

Pour aller plus loin :

On peut observer que la température de la citerne atteindra une température limite de 90 °C d'après l'expression $\theta(t)=90-70\,\mathrm{e}^{-bt}$.

4 Équation différentielle avec changement de fonction inconnue

Il s'agit d'un type d'équation différentielle que nous n'avons jamais vu, appelée « équation logistique » ou de Verhulst.
L'énoncé guide chaque fois en donnant toutes les étapes de la résolution au moyen d'un changement de fonction inconnue conduisant à une équation différentielle que l'on sait résoudre.

1°) a) D'après la règle de dérivation de l'inverse d'une fonction dérivable, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$\forall x\in\mathbb{R}\quad g'(x)=-\dfrac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}$.

b) $\forall x\in\mathbb{R}\quad g'(x)=-\dfrac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}=-\dfrac{f(x)-\left[f(x)\right]^2}{\left[f(x)\right]^2}=\dfrac{f(x)\left[f(x)-1\right]}{\left[f(x)\right]^2}=1-\dfrac{1}{f(x)}=1-g(x)$

De plus, $g(0)=\dfrac{1}{f(0)}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=2$.

On en déduit que g vérifie les conditions (F).

2°) Résolvons l'équation différentielle $z'=1-z$.

On reconnaît une équation différentielle de la forme $z'=az+b$ avec $a=-1$ et $b=1$.

Les solutions de l'équation différentielle $z'=1-z$ sont les fonctions φ définies sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x)=k\mathrm{e}^{-x}+1$ ($k\in\mathbb{R}$).

On cherche la solution g de l'équation différentielle $z'=1-z$ telle que $g(0)=2\quad(1)$.

On sait que $g(x)=k\mathrm{e}^{-x}+1$ où k est un réel.

$(1) \Leftrightarrow k\mathrm{e}^0+1=2$

$\Leftrightarrow k+1=2$

$\Leftrightarrow k=1$

On en déduit que la fonction g est définie par $g(x)=1+\mathrm{e}^{-x}$.

Or $\forall x\in\mathbb{R}\quad g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

Donc $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

Attention, on ne peut pas simplifier l'expression de f de la manière suivante : $f(x)=\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}}=1+\mathrm{e}^{x}$

$\dfrac{1}{a+b}\neq\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$

(confusion avec la règle : $\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{c}$)

Il s'agit d'une équation logistique ou de Verhulst. C'est un cas particulier d'équation de Bernoulli.

5 Équation différentielle avec changement de fonction inconnue

1°) a) v est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}\quad v'(x)=\left[u'(x)\times\mathrm{e}^{2x}\right]+\left[u(x)\times2\mathrm{e}^{2x}\right]=\left[u'(x)+2u(x)\right]\mathrm{e}^{2x}$.

Calculons $v'(x)-3v(x)$.

$\forall x\in\mathbb{R}\quad v'(x)-3v(x)=\left[u'(x)+2u(x)\right]\mathrm{e}^{2x}-3u(x)\times\mathrm{e}^{2x}=\left[u'(x)-u(x)\right]\mathrm{e}^{2x}$

b) v solution de $(\mathrm{E}_2) \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad v'(x)-3v(x)=3$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad \left[u'(x)-u(x)\right]\mathrm{e}^{2x}=3$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad u'(x)-u(x)=\dfrac{3}{\mathrm{e}^{2x}}$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}\quad u'(x)-u(x)=3\mathrm{e}^{-2x}$

$\Leftrightarrow u$ solution de (E_1)

On peut aussi faire l'inverse :

$$
\begin{aligned}
u \text{ solution de } (\mathrm{E}_1) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad u'(x) - u(x) = 3\mathrm{e}^{-2x} \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad [u'(x) - u(x)]\mathrm{e}^{2x} = 3 \\
&\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad v'(x) - 3v(x) = 3 \\
&\Leftrightarrow v \text{ solution de } (\mathrm{E}_2)
\end{aligned}
$$

2°) $(\mathrm{E}_2) \Leftrightarrow y' = 3 + 3y$

On reconnaît une équation différentielle de la forme $y' = ay + b$ avec $a = 3$ et $b = 3$.

Les solutions de (E_2) sont les fonctions v définies sur $\mathbb{R}$ par $v(x) = k\mathrm{e}^{3x} - 1$ ($k \in \mathbb{R}$).

Or $\forall x \in \mathbb{R} \quad v(x) = \mathrm{e}^{2x} u(x)$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad u(x) = \dfrac{v(x)}{\mathrm{e}^{2x}} = v(x)\mathrm{e}^{-2x} = \left(k\mathrm{e}^{3x} - 1\right)\mathrm{e}^{-2x} = k\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-2x}$.

Les solutions de (E_1) sont donc les fonctions u définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = k\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-2x}$ ($k \in \mathbb{R}$).

Autre façon de terminer les calculs :

$k\mathrm{e}^{3x} - 1 = u(x)\mathrm{e}^{2x}$

$u(x) = \dfrac{k\mathrm{e}^{3x} - 1}{\mathrm{e}^{2x}}$

$u(x) = \left(k\mathrm{e}^{3x} - 1\right)\mathrm{e}^{-2x}$

$u(x) = k\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-2x} \quad (k \in \mathbb{R})$