$1^{\text{ère}}$ S Chapitre 28 Le plan muni d'un repère orthonormé

I. Expression analytique du produit scalaire

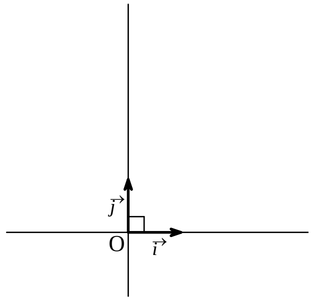
1°) Remarque préliminaire

Dans tout le chapitre, $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est un repère **orthonormé** du plan P.

H_1 : $\vec{i} \perp \vec{j}$

H_2 : $\left\| \vec{i} \right\| = \left\| \vec{j} \right\| = 1$ (pour l'unité de longueur choisie)

On dit que $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont **normés** ou **unitaires**.



2°) Propriété

$\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ sont deux vecteurs quelconques.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

3°) Démonstration

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(x\vec{i} + y\vec{j}\right) \cdot \left(x'\vec{i} + y'\vec{j}\right)$$

$$= xx' \underbrace{\vec{i}^{\,2}}_{1\,(H_2)} + xy' \underbrace{\vec{i} \cdot \vec{j}}_{0\,(H_1)} + yx' \underbrace{\vec{i} \cdot \vec{j}}_{0\,(H_1)} + yy' \underbrace{\vec{j}^{\,2}}_{1\,(H_2)}$$

$$= xx' + yy'$$

II. Distance et orthogonalité

1°) Norme d'un vecteur

$\vec{u}(x\,;y)$ est un vecteur quelconque.

$$\left\| \vec{u} \right\| = \sqrt{\vec{u}^{\,2}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

2°) Distance de deux points

$A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ sont deux points quelconques.

$\overrightarrow{AB} \begin{vmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{vmatrix}$

Donc $AB = \left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$

3°) Condition nécessaire et suffisante d'orthogonalité de deux vecteurs

$\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ sont deux vecteurs quelconques.

$\vec{u} \perp \vec{v} \iff xx' + yy' = 0$

4°) Exercice

$*$ $\vec{u}(2\,;6)$ et $\vec{v}(9\,;-3)$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils orthogonaux ?

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= 2 \times 9 + 6 \times (-3) \\ &= 18 - 18 \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

$*$ $\vec{u}(1\,;4)$ et $\vec{v}(5\,;-1)$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils orthogonaux ?

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= 1 \times 5 + 4 \times (-1) \\ &= 5 - 4 \\ &= 1\end{aligned}$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas orthogonaux.

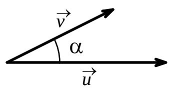
5°) Propriété

a et b sont deux réels quelconques.

$\vec{u}(a\,;b)$ et $\vec{v}(-b\,;a)$ sont <u>orthogonaux</u> et <u>de même norme</u>.

6°) Cosinus de l'angle géométrique formé par deux vecteurs non nuls

$\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ sont deux vecteurs quelconques <u>non nuls</u>.



$$\cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\left\| \vec{u} \right\| \times \left\| \vec{v} \right\|}$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}\right) = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

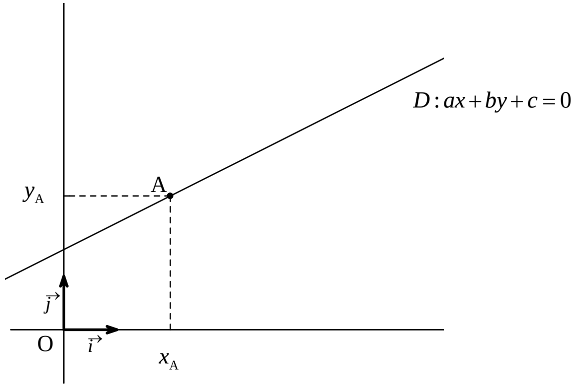
III. Equations cartésiennes de droites

1°) Démonstration

• Hypothèses

D est une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0\ \left((a\ ;\ b)\neq(0\ ;\ 0)\right)$

A est un point fixé de *D*.



• Démonstration

$A \in D$ donc $ax_A+by_A+c=0$

d'où $c=-ax_A-by_A$

$M(x_M\ ;\ y_M)\in D$ si et seulement si $ax_M+by_M+c=0$

si et seulement si $ax_M+by_M+(-ax_A-by_A)=0$

si et seulement si $a(x_M-x_A)+b(y_M-y_A)=0$

si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{AM}(x_M-x_A\ ;\ y_M-y_A)$ est orthogonal au vecteur $\vec{u}(a\ ;b)$

2°) Propriété (très importante)

D est une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0\ \left((a\ ;\ b)\neq(0\ ;\ 0)\right)$

∗ Le vecteur $\vec{u}(a\ ;b)$ est un vecteur non nul dont la direction est orthogonale à celle de *D*.

∗ Le vecteur $\vec{v}(-b\ ;a)$ est un vecteur non nul qui a la même direction que *D*.

3°) Définition

∗ On dit que le vecteur $\vec{u}(a\ ;b)$ est un **vecteur normal à** *D*.

∗ On dit que le vecteur $\vec{v}(-b\ ;a)$ est un **vecteur directeur de** *D*.

4°) Exercice

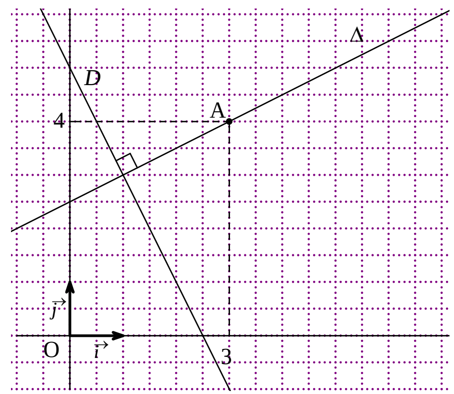
D est la droite d'équation $2x+y-5=0$.

$A(3;4)$

Δ est la droite passant par A et perpendiculaire à *D*.

$D:\ y=-2x+5$

x	0	3
y	5	–1



Déterminer une équation cartésienne de Δ.

Le vecteur $\vec{u}(2\ ;1)$ est un vecteur normal à *D*.

Le vecteur $\vec{v}(-1;2)$ est un vecteur directeur de *D*.

1ère méthode :

$D\perp\Delta$ donc $\vec{v}(-1;2)$ est un vecteur normal à Δ.

Par suite, Δ admet une équation cartésienne de la forme $-1x+2y+c=0$ avec $c\in\mathbb{R}$ c'est-à-dire $-x+2y+c=0$.

On détermine *c*.

$A\in\Delta$ donc $-x_A+2y_A+c=0$

$-3+2\times4+c=0$

$5+c=0$

$c=-5$

Donc une équation cartésienne de Δ s'écrit :

$-x+2y-5=0$

$x-2y+5=0$ $\times(-1)$

$\left(y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\right)$

2^e^ méthode :

$\vec{v}(-1\,;\,2)$ est un vecteur normal à Δ.

$M(x\,;\,y)\in\Delta$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}\perp\vec{v}$
si et seulement si $(x_M-x_A)\times(-1)+(y_M-y_A)\times 2=0$
si et seulement si $(x-3)\times(-1)+(y-4)\times 2=0$
si et seulement si $-x++2y-5=0$

On a utilisé : $\overrightarrow{AM}\left|\begin{matrix}x_M-x_A\\ y_M-y_A\end{matrix}\right.$ et $\vec{v}\left|\begin{matrix}-1\\ 2\end{matrix}\right.$.

3^e^ méthode :

$\vec{u}(2\,;1)$ est un vecteur directeur de Δ.

$M(x\,;\,y)\in\Delta$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires
si et seulement si $\begin{vmatrix}x-3 & 2\\ y-4 & 1\end{vmatrix}=0$
si et seulement si $1\times(x-3)-2\times(y-4)=0$
si et seulement si $x-2y+5=0$

5°) Vecteur directeur et coefficient directeur

D : $y=m\,x+p$

Une équation cartésienne de D s'écrit : $\underbrace{m}_{a}x\underbrace{-1}_{b}y+\underbrace{p}_{c}=0$.

Le vecteur $\vec{v}(\boxed{1}\,;\,m)$ est un vecteur directeur de D.

toujours

6°) Condition nécessaire et suffisante d'orthogonalité de deux droites à l'aide de leurs coefficients directeurs

D : $y=mx+p$ donc le vecteur $\vec{v}(1\,;\,m)$ est un vecteur directeur de D.
D' : $y=m'x+p'$ donc le vecteur $\vec{v}\,'(1\,;\,m')$ est un vecteur directeur de D'.

Donc **<u>en repère orthonormé</u>**

$D\perp D'$ si et seulement si $\vec{v}\perp\vec{v}\,'$
si et seulement si $\vec{v}\cdot\vec{v}\,'=0$
si et seulement si $1\times 1+m\times m'=0$
si et seulement si $m\times m'=-1$

Deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées <u>dans un repère orthonormé</u> sont orthogonales si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs est égal à –1.

IV. <u>Equations cartésiennes de cercles</u>

1°) Deux cas

Définition	Caractérisation	Traduction en coordonnées
cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(a\,;\,b)$, de rayon $R>0$	$M(x\,;\,y)\in\mathcal{C}\Leftrightarrow \Omega M^2=R^2$	$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$
cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AB]	$M(x\,;\,y)\in\mathcal{C}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ $\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$	$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)=0$

2°) Exemple de détermination d'équation cartésienne de cercle

$*$ $\mathcal{C}$: cercle $\left|\begin{matrix}\text{de centre } \Omega(-1\,;\,4)\\ \text{de rayon } R=3\end{matrix}\right.$

<u>Une</u> équation cartésienne de $\mathcal{C}$ s'écrit $(x+1)^2+(y-4)^2=9$.
Cette équation s'écrit aussi $x^2+2x+1+y^2-8y+16=9$
ou encore $\boxed{x^2+y^2}+\boxed{2x-8y}+8=0$ (équation sous forme développée).
termes carrés termes rectangles

$*$ $\mathcal{C}$: cercle de diamètre [AB] avec $A\left|\begin{matrix}-2\\ 3\end{matrix}\right.$ et $B\left|\begin{matrix}4\\ -5\end{matrix}\right.$.

<u>Une</u> équation cartésienne de $\mathcal{C}$ s'écrit $(x+2)(x-4)+(y-3)(y+5)=0$.

3°) Exemple de détermination d'ensembles à partir d'équations cartésiennes

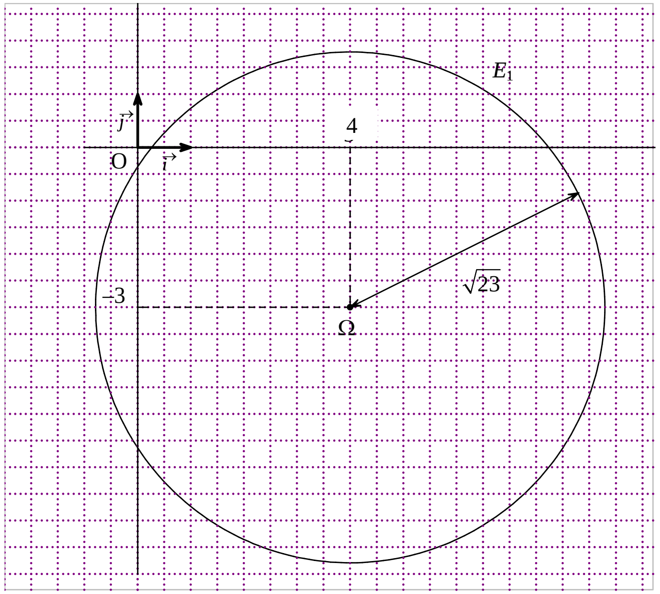
• Déterminer l'ensemble $E_1=\{M(x\,;\,y)\in P\,/\,x^2+y^2-8x+6y+2=0\}$.

L'équation de E_1 s'écrit $\underbrace{x^2-8x}_{\text{polynôme du second degré en } x}+\underbrace{y^2+6y}_{\text{polynôme du second degré en } y}+2=0$.

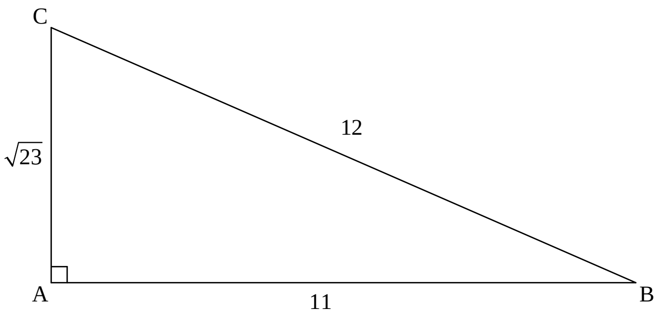
$(x-4)^2-16+(y+3)^2-9+2=0$
$(x-4)^2+(y+3)^2=23$
$(x-4)^2+[y-(-3)]^2=(\sqrt{23})^2$

On reconnaît une équation de la forme $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

E_1 est le cercle de centre $\Omega(4\,;-3)$ et de rayon $R=\sqrt{23}$.

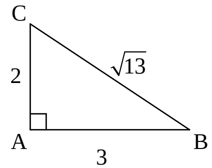


Construction d'un segment de longueur $\sqrt{23}$ à la règle et au compas :
On utilise le théorème de Pythagore en remarquant que $23=12^2-11^2$.



On peut noter que tout entier impair s'exprime comme différence de deux carrés.
En effet, $\forall n\in\mathbb{N}\quad 2n+1=(n+1)^2-n^2$.
Cette égalité permet de construire n'importe quel segment de longueur $\sqrt{2n+1}$.

De même, on peut construire un segment de longueur $\sqrt{13}$ à la règle et au compas.



Pour construire un segment de longueur $\sqrt{5}$ à la règle et au compas, on a deux possibilités :
1[ère] possibilité : $5=1^2+2^2$.
2[e] possibilité : $5=3^2-2^2$.

Autre méthode : l'escargot de Pythagore qui permet de construire des segments de longueurs $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$…
Méthode longue et fastidieuse lorsqu'il s'agit l'entier sous le radical est grand.

Enfin, il y a la **méthode de Descartes** qui permet de construire à la règle et au compas un segment de longueur $\sqrt{a}$ connaissant un segment de longueur *a*.
Cette méthode utilise les relations métriques dans un triangle.

• Déterminer l'ensemble $E_2=\{\mathrm{M}(x\,;y)\in P\,/\,x^2+y^2+2x-6y+10=0\}$.

L'équation de E_2 s'écrit $\underbrace{x^2+2x}+\underbrace{y^2-6y}+10=0$.

$$(x+1)^2-1+(y-3)^2-9+10=0$$
$$(x+1)^2+(y-3)^2=0$$

$\boxed{E_2=\{\,\Omega\,\}\text{ avec }\Omega(-1\,;3)}$

On dit que E_2 est **<u>un singleton</u>**.

• Déterminer l'ensemble $E_3=\{\mathrm{M}(x\,;y)\in P\,/\,x^2+y^2+4x+2y+6=0\}$.

L'équation de E_3 s'écrit $x^2+4x+y^2+2y+6=0$.
$$(x+2)^2-4+(y+1)^2-1+6=0$$
$$(x+2)^2+(y+1)^2=-1 \text{ (impossible)}$$

$\boxed{E_3=\varnothing}$

4°) Bilan

• **Tout cercle admet une équation cartésienne de la forme $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$.**
• **Réciproque fausse.**
L'ensemble des points $\mathrm{M}(x\,;y)$ tels que $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$ est soit un cercle, soit un singleton, soit l'ensemble vide.

Définition

Qu'est-ce qu'une équation cartésienne de droite ou de cercle ?

C'est une relation qui lie les coordonnées d'un point appartenant à la droite ou au cercle.
Le nom d'équation est particulièrement mal choisi comme le dit Stella Baruk dans son dictionnaire des mathématiques car ce ne sont pas des équations au sens ordinaire.
Cela n'est jamais signalé aux élèves au collège et est source d'ennuis pour les élèves.

Le théorème de 4^e^ : cercle circonscrit à un triangle.
Version 4^e^
Version 1^ère^ : passage de deux énoncés en « si …, alors … » en un seul énoncé avec « si et seulement si ».

Bien donner la définition d'un vecteur directeur d'une droite, d'un vecteur normal à une droite.

Il y a une infinité de vecteurs directeurs : ils sont tous colinéaires entre eux.
Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur alors tous les autres vecteurs directeurs sont les vecteurs de la forme $k\vec{u}$ avec *k* non nul.
Ils sont tous colinéaires, pas forcément de même sens.

Remarque sur la phrase :

« Le vecteur $\vec{u}\left(a\,;b\right)$ est un vecteur normal à *D*. »

Les élèves peuvent être choqués par l'article défini suivi de l'article indéfini : il faut le leur expliquer.