TS3 Devoir pour le lundi 18 janvier 2010

Les exercices I à III portent sur des situations concrètes de dénombrement dans des jeux de hasard.

I. Tiercé

Vingt chevaux, portant chacun un numéro de 1 à 20, sont engagés dans une course. Trois d'entre eux vont arriver respectivement premier, second, troisième. (On suppose qu'il n'y a pas d'ex aequo.)
Par exemple : le premier est le n° 10, le second est le n° 3, le troisième est le n° 5. Si on a misé sur ce classement : 10, 3, 5, on gagne le tiercé dans l'ordre ; si on a misé sur ces trois chevaux, mais dans un ordre différent, on gagne le tiercé dans le désordre.
Combien y a-t-il de tiercés dans l'ordre ?
Combien y a-t-il de tiercés dans le désordre ?

II. Loto

Au loto, le joueur doit choisir 6 numéros parmi 49 numéros. Combien y a-t-il de « grilles » de 6 numéros possibles ?
Voici un exemple de grille : {1 ; 12; 18 ; 30 ; 38 ; 45}. Lors du tirage, l'ordre de sortie des 6 numéros ne joue aucun rôle.

III. Poker

Au poker à quatre joueurs, on donne à chacun une main de cinq cartes d'un jeu de trente-deux cartes. Chaque carte a une valeur (par ordre croissant : 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as) et une couleur (trèfle, carreau, cœur, pique).
1°) Combien y a-t-il de mains différentes ?
2°) Une « quinte floche » est formée de cinq cartes consécutives de la même couleur.
Combien y a-t-il de « quintes floches » possibles ?
3°) Une « couleur » est formée de cinq cartes non consécutives de la même couleur.
Combien y a-t-il de « couleurs » possibles ?
4°) Un « carré » est formé de quatre cartes de la même valeur (quatre as ou quatre rois ou...).
Combien y a-t-il de mains différentes contenant un « carré » ?
5°) Un « full » est formé de trois cartes de la même valeur (trois as par exemple) et de deux autres cartes de la même valeur (deux rois par exemple).
Combien y a-t-il de « fulls » ?
6°) Une « quinte » est formée de cinq cartes de valeurs (pas de la même couleur).
Combien y a-t-il de quintes ?

Réponses : 2°) 16. 3°) 208. 4°) 224. 5°) 1 344. 6°) 4096

IV. Moyennes géométriques, arithmétiques etc.

Question préliminaire

Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $\ln x \leq x - 1$ (1).

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On donne n réels strictement positifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et on pose :
$u = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$, $v = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ et $\dfrac{n}{w} = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}$.

Les nombres u, v, w sont respectivement les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique des n nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

1°) En appliquant l'inégalité (1) successivement pour $x = \dfrac{a_1}{u}$, $x = \dfrac{a_2}{u}$, …, $x = \dfrac{a_n}{u}$ et en combinant les n inégalités obtenues, démontrer que l'on a : $v \leq u$ (2).
2°) En remplaçant dans (2) les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ par leurs inverses, démontrer que l'on a : $w \leq v$.