$1^{\text{ère}}$ S3 — Devoir pour le lundi 1^{er} février 2010

I. L'objectif de cet exercice est de démontrer quelques relations métriques dans un triangle rectangle (en dehors du théorème de Pythagore) en utilisant le produit scalaire.

Soit ABC un triangle rectangle en A. On note H le pied de la hauteur issue de A.

1°) Démontrer, en considérant le produit scalaire $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$, que l'on a : $BA^2 = BH \times BC$ (1).
Démontrer également que l'on a : $CA^2 = CH \times CB$ (2).
2°) Démontrer que l'on a: $AH^2 = HB \times HC$ (3) en considérant le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
3°) Démontrer que l'on a: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$ (4).

Indication : transformer le membre de droite en utilisant les relations (1) et (2) ; utiliser ensuite (3).

N.B.
● Toutes les relations de cet exercice méritent d'être retenues par cœur ; il est fortement conseillé de faire une fiche.

● On peut également démontrer ces relations par d'autres méthodes :
- (1) et (2) avec les cosinus ;
- (1), (2), (3) avec les triangles semblables.

II. Soit A et B deux points fixés du plan *P* tels que $AB = 10$.
On note G le barycentre des points pondérés $(A\ ;\ 3)$ et $(B\ ;\ 2)$.
Faire une figure.

1°) Calculer les distances GA et GB.
2°) Démontrer que pour tout point M de *P*, on a $3\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + 2\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 = 5\ MG^2 + 120$.
3°) En déduire l'ensemble *E* des points M du plan *P* tels que l'on ait : $3\ MA^2 + 2\ MB^2 = 140$.
Tracer *E*.

On rédigera selon le modèle ci-dessous :

« $M \in E$ si et seulement si
si et seulement si
si et seulement si
si et seulement si …… »

$1^{\text{ère}}$ S3

Correction du devoir pour le lundi 1^{er} février 2010

I. Hypothèses :

ABC triangle rectangle en A
H pied de la hauteur issue de A.

1°) D'une part, $\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BH} \bullet \overrightarrow{BC}$ car H est le projeté orthogonal de A sur (BC)

$= BH \times BC$ car $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et de même sens

D'autre part, $\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BA}$ car A est le projeté orthogonal de C sur la droite (BA)

$= \overrightarrow{BA}^2$

$= BA^2$

Conclusion : $BA^2 = BH \times BC$ (1).

D'une part, $\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CH} \bullet \overrightarrow{CB}$ car H est le projeté orthogonal de A sur (BC)

$= CH \times CB$ car $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires et de même sens

D'autre part, $\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CA}$ car A est le projeté orthogonal de B sur la droite (CA)

$= \overrightarrow{CA}^2$

$= CA^2$

Conclusion : $CA^2 = CH \times CB$ (2).

2°) $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}\right) \bullet \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}\right)$

$$= \overrightarrow{AH} \bullet \overrightarrow{AH} + \underbrace{\overrightarrow{AH} \bullet \overrightarrow{HC}}_{0} + \underbrace{\overrightarrow{HB} \bullet \overrightarrow{AH}}_{0} + \overrightarrow{HB} \bullet \overrightarrow{HC}$$

$$= \overrightarrow{AH}^2 - HB \times HC$$

$$= AH^2 - HB \times HC$$

D'autre part, $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = 0$ car le triangle ABC est rectangle en A.

On a donc : $AH^2 - HB \times HC = 0$.

Par suite, on en déduit que $\boxed{AH^2 = HB \times HC}$ (3).

3°) Démontrons que l'on a: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$ (4).

On va partir du membre de droite de cette relation.

D'après les relations (1) et (2), on a : $\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}=\dfrac{1}{BH\times BC}+\dfrac{1}{CH\times CB}$.

$$=\frac{1}{BC}\left(\frac{1}{BH}+\frac{1}{CH}\right)$$
$$=\frac{1}{BC}\left(\frac{BH+CH}{BH\times CH}\right)$$

Or $H\in[BC]$ d'où $BH+CH=BC$.

De plus, d'après la relation (4), on a : $AH^2=HB\times HC$.

D'où : $\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}=\dfrac{1}{\cancel{BC}}\times\dfrac{\cancel{BC}}{AH^2}$

Par suite, on a : $\boxed{\dfrac{1}{AB^2}+\dfrac{1}{AC^2}=\dfrac{1}{AH^2}}$.

II. Hypothèses :

$AB=10$
G : barycentre de $(A\ ;\ 3)$ et $(B\ ;\ 2)$

1°) On a : $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.

On en déduit que $AG=\dfrac{2}{5}AB=\dfrac{2}{5}\times 10=2\times 2=4$

Comme $G\in[AB]$, on a : $BG=AB-AG=10-4=6$

2°) Démontrons que pour tout point M de *P*, on a $3\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2=5\ MG^2+120$.

$$\begin{aligned}
3\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2 &= 3\left(\overrightarrow{MG}^2+2\overrightarrow{MG}\bullet\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}^2\right)+2\left(\overrightarrow{MG}^2+2\overrightarrow{MG}\bullet\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GB}^2\right)\\
&= 3\left(MG^2+2\overrightarrow{MG}\bullet\overrightarrow{GA}+GA^2\right)+2\left(MG^2+2\overrightarrow{MG}\bullet\overrightarrow{GB}+GB^2\right)\\
&= 5MG^2+2\overrightarrow{MG}\bullet\left(\underbrace{3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}}_{\vec{0}}\right)+\left(3GA^2+2GB^2\right)\\
&= 5MG^2+\left(3\times 4^2+2\times 6^2\right)\\
&= 5MG^2+\left(48+72\right)\\
&= 5MG^2+120
\end{aligned}$$

3°) Déterminons l'ensemble E des points M du plan P tels que l'on ait : $3\ \mathrm{MA}^2 + 2\ \mathrm{MB}^2 = 140$.

D'après la question 2°),

$\forall \mathrm{M} \in P \quad 3\ \mathrm{MA}^2 + 2\ \mathrm{MB}^2 = 3\ \overrightarrow{\mathrm{MA}}^2 + 2\ \overrightarrow{\mathrm{MB}}^2 = 3\left(\overrightarrow{\mathrm{MG}} + \overrightarrow{\mathrm{GA}}\right)^2 + 2\left(\overrightarrow{\mathrm{MG}} + \overrightarrow{\mathrm{GB}}\right)^2 = 5\ \mathrm{MG}^2 + 120$.

$\mathrm{M} \in E$ si et seulement si $5\ \mathrm{MG}^2 + 120 = 140$
si et seulement si $5\ \mathrm{MG}^2 = 20$
si et seulement si $\mathrm{MG}^2 = 4$
si et seulement si $\mathrm{MG} = 2$

Conclusion : L'ensemble E est le cercle de centre G et de rayon 2.