$1^{\text{ère}}$ S Chapitre 27 Approximation affine

<u>Mots clefs du chapitre :</u>

- valeur approchée - valeur exacte ;
- erreur ;
- fonction affine ;
- tangente.

Ce chapitre répondra (comme ce doit être le cas pour tous les chapitres) aux trois questions suivantes exprimées en langage familier sous la forme :

- D'où ça vient ?
- A quoi ça sert ?
- Comment ça marche ?

Chapitre présentant plus un intérêt théorique que pratique.

I. <u>Introduction : approcher un nombre</u>

1°) Calculer ; approcher

Dans les classes antérieures, on a surtout appris à calculer des nombres.
Or **approcher un nombre** est aussi important que de calculer un nombre.

Jean Dieudonné, grand mathématicien du XX$^{\text{e}}$ siècle, disait que « majorer, minorer, approcher » sont les activités principales en analyse.

Très tôt, on a appris la **notion de valeur exacte** et de **valeur approchée**.
On insiste bien sur ces deux notions qu'il ne faut pas confondre en mathématiques (alors qu'en physique, on n'y fait beaucoup moins attention, étant donné que l'on travaille la plupart du temps avec des valeurs approchées).

On apprend alors à travailler avec des valeurs exactes et avec des valeurs approchées.

2°) Exemples

- On peut penser au nombre π. Comment calculer des valeurs approchées de π ?
  Ce problème a suscité des recherches très importantes depuis longtemps (algorithmes d'approximation qu'il n'est pas possible de présenter en $1^{\text{ère}}$).

- On verra en Terminale le problème d'approximation de solutions d'équations que l'on ne sait pas résoudre.

- On verra également qu'il arrive parfois que l'on connaisse une fonction uniquement par sa dérivée sans que l'on puisse expliciter la fonction.
  Il est néanmoins possible de calculer des valeurs approchées d'images de nombres par cette fonction.

3°) Le but du chapitre

On peut dire en gros que l'approximation consiste à rendre SIMPLE une expression COMPLIQUEE.

Plus précisément, l'approximation affine va permettre de réaliser des calculs simplement selon le schéma :

Calculer SANS CALCULATRICE un nombre compliqué

$\downarrow$ Utiliser les dérivées
Formule d'AAT

Calculer un nombre plus simple

II. <u>Fonction affine tangente</u>

1°) Définition

$f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$
$a \in \mathrm{I}$ fixé.
On suppose que f est dérivable en a.

On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f dans un repère.
On note T la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a.

La **fonction affine** g dont la représentation graphique est T est appelée la **fonction affine tangente** associée à f en a.

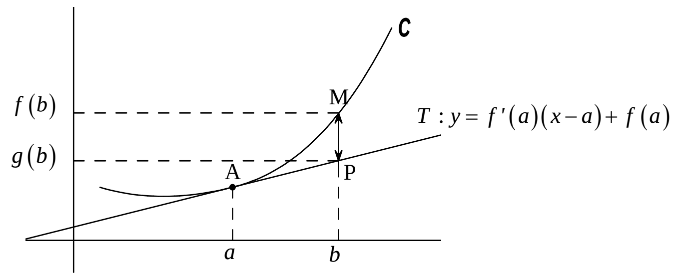
2°) Formule

T a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

La fonction g est définie par $g(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$.

3°) Exemple

Illustration graphique



Retenir que :

Chercher la fonction affine tangente revient à chercher l'équation de la tangente.

III. Principe de l'approximation affine tangente

1°) Retour sur l'idée de tangente

Intuitivement, au voisinage du point A, la droite *T* est « proche » de la courbe $\mathcal{C}$.

La tangente est la droite qui « colle » le mieux à la courbe autour du point A.

On peut « remplacer » au voisinage du point A d'abscisse *a* la courbe par un morceau de la tangente au point A.
.

2°) Application

On prend un nombre *b* « proche » de *a*.

Lorsque l'on calcule $g(b)$, le résultat obtenu est proche de celui de $f(b)$.
On peut dire que $g(b)$ est **une valeur approchée** de $f(b)$.

On ne sait pas :

- si c'est une valeur approchée par excès ou par défaut.
- quelle est l'erreur commise.

En tout cas, plus *b* est proche de *a*, plus les deux nombres sont proches.

Comme *g* est la fonction affine tangente en *a* associée à *f*, lorsque l'on calcule $g(b)$, on dit que le nombre obtenu est la valeur approchée de $f(b)$ obtenue par **approximation affine tangente en *a***.

3°) Meilleure approximation affine

On peut démontrer que la fonction *g* est la **meilleure approximation affine de *f* en *a*** (en un sens qu'il n'est pas possible de définir au niveau 1ère).

La fonction *g* est appelée la **fonction affine tangente associée *f* en *a*** ou **la meilleure approximation affine de *f* en *a***.

IV. Formule générale d'approximation affine tangente

C'est la formule du chapitre à savoir.
C'est celle que l'on appliquera tout le temps.

1°) Formule d'approximation affine tangente à connaître et à appliquer directement

$f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$
$a \in \mathrm{I}$ fixé.

Si *f* est dérivable en *a*, alors pour *h* « proche » de 0, on a : $f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$.
(Formule d'AAT en *a* ou au voisinage de *a*)

Recopier le *h* en rouge (variable tandis que *a* est fixe dans cette formule).
Cette formule dépend évidemment de la fonction *f*.

2°) Démonstration

On a : $g(a+h) = f(a) + hf'(a)$.

Donc pour *h* « proche » de 0, $g(a+h)$ est proche de $f(a+h)$.

3°) Commentaires

● Cette formule qui a l'air compliquée est assez simple à comprendre.
C'est une **formule de développement (d'ordre 1, à deux termes)**.

On peut dire d'une certaine manière que l'on touche ici à ce que l'on appelle le « calcul infinitésimal ».

● Si la fonction *f* est dérivable sur l'intervalle I, alors on peut appliquer la formule d'AAT en tout réel *a* de I.

V. Application de la formule d'AAT

1°) Mise en application de la formule

On désire calculer l'image d'un nombre décimal proche d'un entier c'est-à-dire que l'on appliquera la formule d'approximation affine tangente en prenant pour *a* un entier naturel et pour *h* un nombre décimal « proche » de 0 (en règle générale, 0,1, 0,01, 0,001…), les nombres *a* et *h* étant à choisir convenablement suivant le problème posé.

2°) Exemple

Calculer une valeur approchée de $5{,}1^2$ SANS CALCULATRICE avec la formule d'AAT.

Commentaire	Démarche
On définit une fonction.	On considère la fonction $f : x \mapsto x^2$.
On calcule sa dérivée.	La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2x$
On souhaite calculer $5{,}1^2 = f(5{,}1)$. On décompose le nombre 5,1.	$5{,}1 = 5 + 0{,}1$ On pose : $a = 5$ $h = 0{,}1$ (proche de 0).
On écrit la formule d'AAT.	Pour *h* « proche » de 0, on a : $f(5+h) \approx f(5) + hf'(5)$.
On calcule les valeurs numériques.	$f(5) = 5^2 = 25$ $f'(5) = 2 \times 5 = 10$
On remplace dans la formule d'AAT.	$f(5+0{,}1) \approx 25 + 0{,}1 \times 10$ $f(5{,}1) \approx 26$

Avec la calculatrice ou en posant le calcul « à la main », on trouve : $5{,}1^2 = 26{,}01$.
On voit que le résultat trouvé par AAT est vraiment proche de la valeur exacte de $5{,}1^2$.

Remarque :

On aurait aussi pu déterminer l'expression de la fonction affine tangente g associée à f en 5 et l'utiliser pour calculer une valeur approchée de $5{,}1^2$.

3°) Point-méthode

Pour déterminer une valeur approchée d'un nombre par AAT, il faut commencer par définir une fonction f.

On peut ensuite au choix :

- déterminer la fonction affine tangente g associée à f et utiliser cette fonction pour calculer la valeur approchée
- appliquer directement la formule d'ATT en décomposant le nombre.

On peut utiliser les 2 méthodes mais en général on préfère appliquer la 2e méthode.

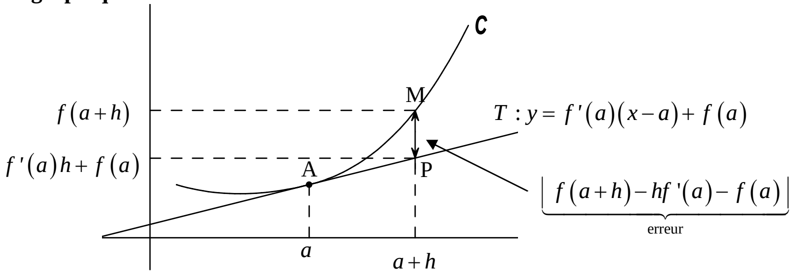
VI. Erreur (ou incertitude)

1°) Notion d'erreur

Lorsque l'on a un nombre x et une valeur approchée x_0 de ce nombre, **l'erreur** est la valeur absolue de la différence $|x-x_0|$.

Quand on a une valeur approchée d'un nombre, il est intéressant de connaître **l'erreur** ou **un majorant de l'erreur** qui donnera la précision de l'approximation.

2°) Illustration graphique



3°) Erreur pour l'AAT

Graphiquement l'erreur commise est égale à la distance MP.
La formule d'ATT ne donne cependant pas de majorant de cette erreur (voir exemples en exercices).

Rappel de définition

On dit que x_0 est une **valeur approchée d'un réel x à ε près** $(\varepsilon > 0)$ pour exprimer que $|x-x_0| \leq \varepsilon$.

VII. Intérêt des approximations affines tangentes

1°) Calcul mental (cf. IV)

Déterminer **SANS CALCULATRICE** une valeur approchée de l'image d'un nombre par une fonction.

2°) En physique

3°) Méthode d'Euler (voir plus tard)

En résumé, l'approximation affine tangente consiste à rendre SIMPLE une expression COMPLIQUEE.

Retenir le schéma

Fonction affine $\longleftrightarrow$ AAT $\longleftrightarrow$ Tangente à la courbe